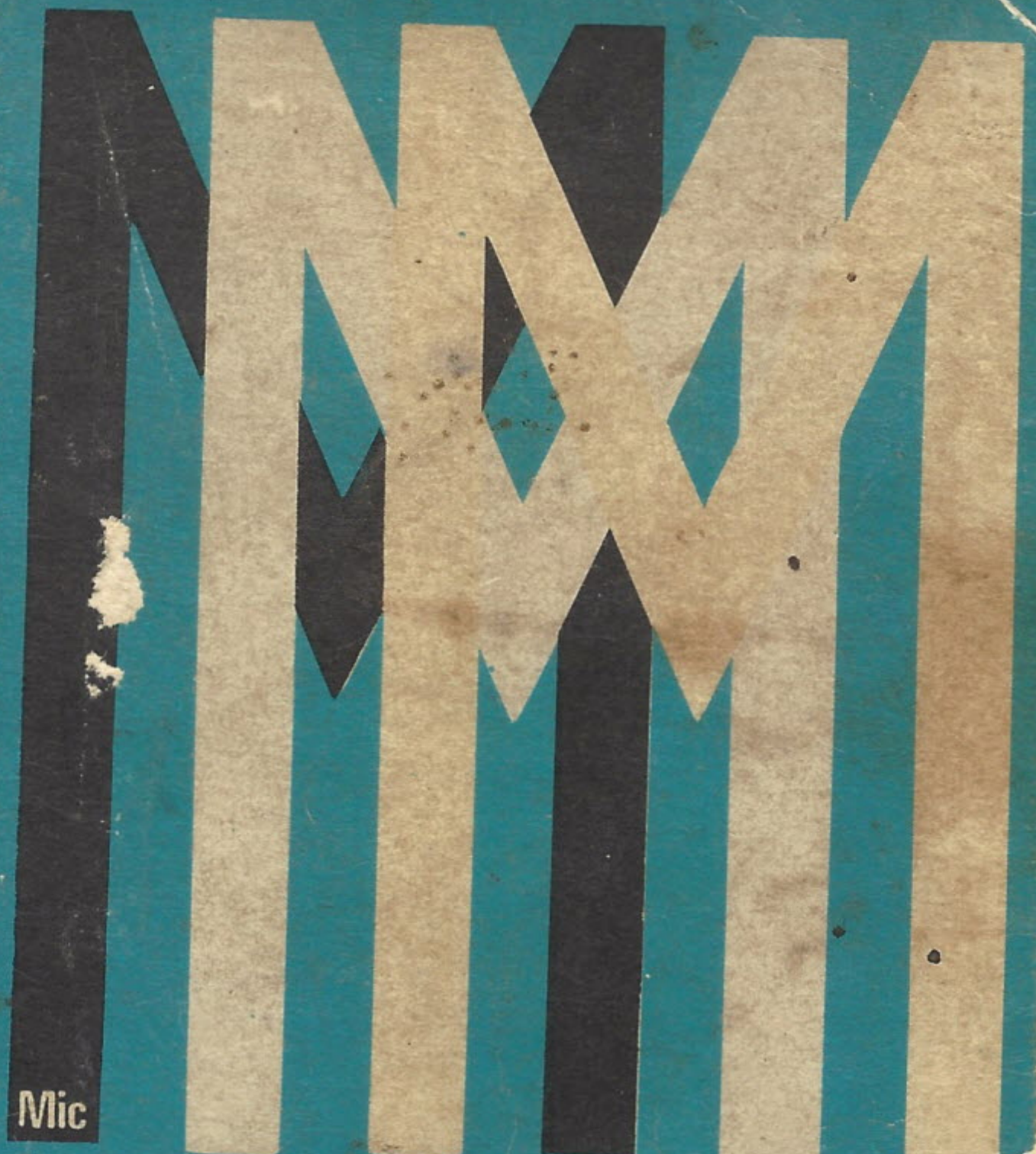
Gh. Th. Gheorghiu



Mic

memorator de matematică

CUPRINS

1. Aritmetică

§ 1.1. Numere reale 9
§ 1.2. Operaţii cu numere reale 19
§ 1.3. Rapoarte şi proporţii 21
§ 1.4. Puteri şi radicali 24

2. Algebră

§ 2.1. Mulţimi. Structuri 29
§ 2.2. Polinoame. Fracţii algebrice 37
§ 2.3. Analiza combinatorie. Binomul lui Newton 43
§ 2.4. Ecuaţii particulare 51
§ 2.5. Inegalităţi 55
§ 2.6. Determinanţi 58
§ 2.7. Matrice 66
§ 2.8. Sisteme de ecuaţii liniare 67

2. Trigonometrie

§ 3.1. Funcţii trigonometrice directe şi inverse 71
§ 3.2. Formule şi ecuaţii trigonometrice.. 80
§ 3.3. Rezolvarea triunghiurilor..... 88
§ 3.4. Numere complexe 95

4. Geometria euclidiană a planului

§ 4.1. Unghiuri. Drepte paralele 101
§ 4.2. Cercul 107
§ 4.3. Locuri geometrice 114
§ 4.4. Triunghiuri 117
§ 4.5. Patrulatere 127
§ 4.6. Poligoane 132
§ 4.7. Construcţii geometrice cu rigla şi compasul 135

5. Geometria euclidiană a spaţiului

§ 5.1. Drepte şi plane 147
§ 5.2. Corpuri solide determinate de drepte şi plane..... 153
§ 5.3. Suprafeţe. Corpuri rotunde 157
§ 5.4. Arii şi volume 160
§ 5.5. Transformări geometrice 171

6. Geometria analitică plană

§ 6.1. Elemente de calcul vectorial 177
§ 6.2. Geometria analitică a dreptei 182
§ 6.3. Dreapta în plan 183
§ 6.4. Cercul..... 192
§ 6.5. Conice 197

7. Analiză matematică

§ 7.1. Funcţii. Şiruri..... 207
§ 7.2. Funcţii elementare..... 211
§ 7.3. Noţiunea de limită..... 220
§ 7.4. Funcţii continue..... 225
§ 7.5. Funcţii derivabile 227
§ 7.6. Proprietăţile funcţiilor derivabile: extreme, nedeterminări, grafice.... 232
§ 7.7. Ecuaţii algebrice 240
§ 7.8. Primitive 248
§ 7.9. Integrale definite. Aplicaţii geometrice 253
§ 7.10. Ecuaţii diferenţiale 256

8. Mecanică

§ 8.1. Elemente de statică..... 259
§ 8.2. Elemente de cinematică..... 267
§ 8.3. Elemente de dinamică 269

9. Calculul probabilităţilor

§ 9.1. Evenimente, probabilităţi 273
§ 9.2. Scheme clasice de probabilitate.... 277
§ 9.3. Variabile aleatoare. Valori tipice.. 279
§ 9.4. Elemente de statistică matematică 283

1. ARITMETICĂ

§ 1.1. Numere reale

1. Mulțimi de numere

T. 1

Numele	Simbolul	Mulțimea
Numere naturale	N	$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$
—	N_0	$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$
Numere impare (fără soț)	—	$1, 3, 5, \ldots, 2p+1, \ldots,$
Numere pare (cu soț)	—	$2, 4, 6, \ldots, 2p, \ldots$
Numere întregi	Z	$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$
Numere prime	—	Numerele naturale care nu au ca divizori decît pe 1 și pe ele însele; *șirul numerelor prime este infinit;* numerele prime mai mici ca 100 sînt:

Numele	Simbolul	Mulțimea
	—	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97
Numere raționale (comensurabile sau fracționare)	Q	$a=n/m$ $(n, m\in Z, m\neq 0)$ (conține numerele întregi pentru $m = 1$)
Numere iraționale (incomensurabile)	—	Numerele reale care nu pot fi exprimate printr-un întreg sau prin cîtul a doi întregi
Numere reale	R	Reuniunea mulțimilor numerelor raționale și iraționale pozitive sau negative inclusiv 0.
	R^+, R_+	Mulțimea numerelor reale pozitive
	R^-, R_-	Mulțimea numerelor reale negative
	R^*	Mulțimea numerelor reale diferite de zero
	R_+^*	Mulțimea numerelor reale strict pozitive
Numere complexe	C	Pentru proprietăți și definiții (§ 3.4)

Egalitatea în aritmetică, ca şi în algebră, este notată cu semnul = şi se bucură de proprietăţile:

a) $n = n$ (se zice că este *reflexivă*).

b) Dacă $n = m$, rezultă $m = n$ *(simetrică)*.

c) Dacă $n = m$ şi $m = p$, atunci $n = p$ *(tranzitivă)*.

Pentru că egalitatea se bucură de aceste proprietăţi este o *relaţie de echivalenţă* (§ 2.1.1)*). Egalităţile sînt de două feluri: *identităţi*, care sînt adevărate pentru orice valori date literelor ce o compun, şi *ecuaţii*, care sînt adevărate numai pentru anumite valori date unor litere (numite *necunoscute*) din cele ce o compun. Egalităţile pot fi adunate (sau scăzute), înmulţite (sau împărţite, presupunînd că ambele părţi sînt diferite de zero) parte cu parte.

Inegalitatea $a<b$ (sau $b>a$) exprimă faptul că *a este mai mic decît b*, (sau *b este mai mare decît a*). Inegalităţile sînt *tranzitive*: dacă $a<b$, $b<c$ rezultă $a<c$.

Două, sau mai multe egalităţi de *acelaşi sens* au aceleaşi proprietăţi ca şi egalităţile cu deosebirea esenţială că înmulţind o inegalitate cu un număr negativ, îşi schimbă sensul (deci două inegalităţi de acelaşi sens nu pot fi scăzute între ele). Inegalităţile care au loc numai pentru anumite valori date unor litere se numesc *inecuaţii*.

*) Notaţia (§ 2.1) înseamnă „v. paragraful 2.1;“ notaţia (§ 2.1.1) înseamnă „v. 1 din acelaşi paragraf.“

2. Mulțimea numerelor naturale poate fi definită prin următoarele axiome:

a) Există numărul 1 care nu are un precedent.

b) Orice număr natural n are un succesor n' și numai unul.

c) Dacă $n' = m'$ și precedentele lor se bucură de aceeași proprietate, adică $n = m$.

d) Orice mulțime de numere naturale care conține pe 1 și care, o dată cu fiecare număr al său, conține și pe următorul n', conține toate numerele naturale.

Luînd aceste proprietăți ca axiome *(axiomele lui Peano)* putem defini operațiile cu aceste numere, cum și toate proprietățile lor. Pe ultima axiomă se bazează *metoda inducției complete* sau *din aproape în aproape*. Acest raționament constă în a arăta că dacă o formulă $E(n)$ este adevărată și pentru $E(n')$, este suficient s-o verificăm pentru $n = 1$, pentru a afirma că este adevărată pentru orice valoare a lui n.

3. Cîteva proprietăți ale numerelor naturale.

a) Dacă un număr $d \neq 1$, împarte exact pe n, vom spune că d este *divizor* al lui n și vom avea $n = dm$, unde $m \in N$; invers, n se numește *multiplu* al lui d. În (T. 2) avem cîteva reguli simple de *divizibilitate*.

Divizorul	Regula
2	Ultima cifră să fie 0 sau pară.
3 (sau 9)	Suma cifrelor să fie divizibilă cu 3 (respectiv 9)
5	Ultima cifră să fie 0 sau 5
4 (sau 25)	Ultimele două cifre să fie 00 sau să formeze un număr divizibil cu 4 (respectiv 25)
8 (sau 125)	Ultimele trei cifre să fie 000 sau să formeze un număr divizibil cu 8 (respectiv 125)
11	Diferența dintre suma cifrelor de rang par și cea a numerelor de rang impar să fie 0 sau să se dividă cu 11

b) Dacă $n_1 > n_2$, o relație de forma

$$(1) \qquad \boxed{n_1 = n_2 \cdot q + r \qquad (r < n_2),}$$

vom spune că definește *împărțirea* lui n_1 *(deîmpărțit)* prin n_2 *(împărțitor)*, în care q este *câtul*

iar r *restul*. Dacă $r = 0$, se zice că împărţirea se face *exact*.

c) Orice număr natural care nu este prim, se poate *descompune în factori primi*

$$(2) \qquad \boxed{n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r},}$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sînt numere prime iar $m_1, m_2, \ldots, m_r$ numere naturale. Descompunerea este unică. Orice divizor al lui n va fi de aceeaşi formă cu (2) în care puterile factorilor primi sînt 0 sau mai mici decît puterile corespunzătoare din (2).

4. Fiind date două numere naturale n_1, n_2 $(n_1 < n_2)$, un număr d, care le împarte exact pe amîndouă, se numeşte un *divizor comun* al lor. Două numere care n-au nici un divizor comun diferit de 1, se zice că sînt *prime între ele*. *Cel mai mare divizor comun* a două numere (c.m.m.d.c) poate fi obţinut prin una din metodele:

a) Dacă cele două numere sînt descompuse în factori primi, c.m.m.d.c va fi produsul tuturor factorilor primi comuni la puterile cele mai mici.

b) În caz contrar, se fac următoarele împărţiri succesive:

$$n_2 = n_1 c_1 + r_1, \quad n_1 = r_1 c_2 + r_2, \quad r_1 = r_2 c_3 + r_3, \ldots$$

Da ă $r_{n+1} = 0$, atunci r_n = c.m.m.d.c. Dacă la împărţirea lui r_h cu r_{h+1} $(h<n)$ observăm că

aceste două numere sînt prime între ele, putem afirma că și cele date inițial au aceeași proprietate. Dacă facem împărțirile pînă la capăt și ultimul rest este 1, înseamnă că cele două numere sînt prime între ele *(algoritmul lui Euclid)*.

C.m.m.d.c al mai multor numere naturale n_1, n_2, n_3,... se calculează prin aceleași metode. În prima metodă aplicăm aceeași regulă iar în a doua, calculăm c.m.m.d.c al primelor două numere, fie d_1; apoi calculăm c.m.m.d.c al numerelor d_1 și n_3, fie d_2; etc. Ultimul c.m.m.d.c va fi c.m.m.d.c al tuturor numerelor.

5. Dacă un număr natural n se divide cu n_1 și n_2, se zice că n este un *multiplu comun* al numerelor n_1 și n_2. *Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c)* a două numere se poate calcula prin una din metodele:

a) Dacă numerele sînt descompuse în factori primi, c.m.m.m.c va fi produsul tuturor factorilor comuni și necomuni la puterile cele mai mari.

b) În caz contrar, se calculează c.m.m.d.c $= d$ al numerelor și fie $n_1 = dc_1$, $n_2 = dc_2$. Atunci c.m.m.m.c $= dc_1c_2$. Dacă numerele sînt prime între ele, c.m.m.m.c $= n_1n_2$.

C.m.m.m.c al mai multor numere se calculează prin cele două metode urmînd aceleași reguli.

6. Congruențe.

Două numere naturale n_1, n_2 sînt *congruente în raport cu modulul m*, dacă împărțite cu m dau același rest. Vom scrie

$$n_1 \equiv n_2 \pmod{m}; \tag{3}$$

acest lucru se întîmplă dacă și numai dacă diferența $n_1 - n_2$ este un multiplu de m.

Congruențele au aceleași proprietăți cu egalitățile (§ 1.1.1).

7. Cîteva proprietăți ale fracțiilor.

a) Fracția n/m (n se numește *numărător*, m — *numitor* și ambii — *termenii* fracției) se zice că este *ireductibilă* dacă n și m sînt primi între ei. Dacă d este c.m.m.d.c al lui n, m, adică $n = dn_1$, $m = dm_1$, atunci $n/m = n_1/m_1$, ultima valoare este fracția *simplificată* și reprezintă forma ei ireductibilă. Operația inversă simplificării $n/m = np/mp$ se numește *amplificare*. Dacă $n > m$ și $n = mq + r$, atunci se scrie $\frac{n}{m} = q\,\frac{r}{m}$, unde q reprezintă întregii fracției.

b) Dacă o fracție are ca numitor pe $10^n (n \in N)$, atunci fracția se numește *zecimală* și poate fi reprezentată prin numărul de la numărător căruia îi punem o virgulă după n cifre de la dreapta

spre stînga; dacă numărul de la numărător are $m<n$ cifre, atunci în faţa lui se aşază $n - m + 1$ zerouri şi apoi se pune virgula ca la cazul precedent. O fracţie care nu este zecimală se numeşte *ordinară*.

c) *O fracţie zecimală periodică simplă* are după virgulă, un număr natural, numit *perioadă*, repetat de o infinitate de ori (0,521521...); o *fracţie periodieă mixtă* conţine după virgulă un număr natural fix, după care apare o perioadă (0,178181,..). O fracţie ordinară ireductibilă se transformă în fracţie periodică simplă, dacă numitorul ei nu are factorii 2 şi 5; se transformă în fracţie periodică mixtă dacă printre factorii primi ai numitorului se găseşte 2 sau 5. În acest ultim caz, partea neperiodică va avea m cifre, m fiind cel mai mare dintre exponenţii lui 2 şi 5. Invers, avem

$$(4) \qquad \boxed{0,nn\ldots = \frac{n}{10^p - 1}},$$

$$(5) \qquad \boxed{0,mnn\ldots = \frac{1}{10^q}\left(m + \frac{n}{10^p - 1}\right)},$$

unde p este numărul cifrelor lui n, iar q numărul cifrelor lui m.

8. a) Numerele iraţionale scrise sub formă zecimală au o infinitate de zecimale şi nu sînt periodice.

b) Numerele iraţionale sînt de două tipuri: *algebrice* cînd pot fi considerate ca rădăcini ale unei ecuaţii $P(x)=0$, unde P este un polinom cu coeficienţi raţionali (§ 7.7) (ex: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{2}, ..$), *transcendente* în caz contrar (ex: π, e,..).

c) Numerele iraţionale sînt folosite în calcul prin valorile lor *aproximative* exprimate prin fracţii zecimale (ex: $\sqrt{2} = 1{,}41...$, $\sqrt{3} = 1{,}73...$, $e = 2{,}718...$, $\pi = 3{,}14...$). În general, dacă un număr iraţional a se scrie sub forma $\alpha < a < \beta$, unde α, β sînt fracţii zecimale, atunci α va reprezenta o valoare *prin lipsă* a lui a, iar β o valoare *prin adaos*. *Eroarea* pe care o facem luînd pentru a una din aceste valori, este mai mică decît $\varepsilon = \beta - \alpha$.

9. O mulţime (§ 2.1) este *numărabilă* cînd poate fi pusă în *corespondenţă biunivocă* (§ 7.1.1 c) cu mulţimea numerelor naturale (de ex., mulţimea Z este numărabilă). Mulţimea numerelor reale dintr-un interval $[a, b]$ *nu* este numărabilă; se zice că are *puterea continuului*.

10. Scrierea numerelor zecimale se face în baza 10, adică se scriu sub forma

$$(6) \quad N = 10^n a_0 + 10^{n-1} a_1 + \ldots + 10 a_{n-1} + a_n \qquad (0 \leqslant a_k \leqslant 9)$$

sau sub formă prescurtată $a_0a_1...a_n$. Această scriere este unică.

Exprimarea unui număr în baza B se face scriindu-l sub forma

$$(6') \quad N = B^n b_0 + B^{n-1} b_1 + \ldots + B b_{n-1} + b_n = \\ = (b_0 b_1 \ldots b_n)_B \quad (0 \leqslant b_k \leqslant B - 1).$$

Scrierea este unică și se procedează astfel: împărțim cu B și fie $N = BN_0 + b_0$; împărțim din nou $N_0 = BN_1 + b_1$, ș.a.m.d. Resturile succesive sînt cifrele numărului N scris în baza B.

Exprimarea unui număr în baza 2 se face numai cu ajutorul cifrelor 0 și 1. Această scriere este folosită în calculatoare electronice.

§ 1.2. Operații cu numere reale

1. Operațiile de adunare, scădere, înmulțire și împărțire ale numerelor întregi, le presupunem cunoscute. Orice număr întreg poate fi scris sub formă de fracție al cărui numărător este el însuși, iar numitorul 1.

2. Suma sau diferența fracțiilor care au același numitor, este o fracție care are același numitor iar ca numărător suma sau diferența numărătorilor. Dacă fracțiile nu au același numitor, se aduc la același numitor calculînd c.m.m.m.c (§ 1.1.5) al numitorilor inițiali și apoi se procedează ca mai sus.

Înmulțirea și împărțirea a două fracții se face după regulile

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\ ;\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

După oricare din aceste operații, rezultatul trebuie simplificat.

Dintre două fracții care au același numitor, aceea care are numărătorul mai mare este mai mare. Dintre două fracții care au același numărător, aceea care are numitorul mai mic este mai mare. Pentru a compara două fracții între ele, le aducem în prealabil la același numitor (sau la același numărător).

3. Operațiile de adunare și înmulțire a numerelor reale, se bucură de următoarele proprietăți.

(7) $a+b$ și ab sînt numere reale (propriet. de închidere față de adunare și înmulțire).

(8) $a+b=b+a$; $ab=ba$ (legea comutativității).

(9) $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a(bc)=(ab)c$ (legea asociativității).

(10) $a(b+c)=ab+ac$ (legea distributivității).

(11) $a+0=a$; $a\cdot 0=0$; $a\cdot 1=a$.

(12) $a+(-a)=0$; $a(1/a)=1$ $(a\neq 0)$.

(13) $a+c=b+c$ cere $a=b$, } (legea

(14) $ac=bc$ cere $a=b$ $(c\neq 0)$ } reducerii).

Împărțirea cu „0" nu are sens.

4. **Valoarea absolută** a unui număr real a este definită prin

$$(15) \qquad |a| = \begin{cases} a \text{ dacă } a > 0, \\ -a \text{ dacă } a < 0, \\ 0 \text{ dacă } a = 0, \end{cases}$$

încît avem întotdeauna $|a| \geqslant 0$. Avem proprietățile:

$$(16) \quad |a| = 0 \text{ implică } a = 0.$$

$$(17) \quad ||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

$$(18) \quad |ab| = |a||b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Inegalitățile: $|a| \leqslant A$, $|b| \leqslant B$ implică

$$(19) \quad |a| + |b| \leqslant A + B \text{ și } |ab| \leqslant AB.$$

$$(19') \quad |a - b| < c \text{ este totuna cu } b - c < a < b + c \text{ și invers.}$$

§ 1.3. Rapoarte și proporții

1. *Raportul* a două mărimi a, b de aceeași natură, este cîtul numerelor abstracte care reprezintă aceste mărimi măsurate cu o aceeași unitate de măsură, și-l vom reprezenta prin a/b.

2. Se numeşte *proporţie* egalitatea a două rapoarte $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; numerele a şi d se numesc *extremi*, b, c se numesc *mezi*, iar toate numerele a, b, c, d se numesc *termenii* proporţiei.

3. *Proprietăţi fundamentale.*

a) Dacă schimbăm mezii sau extremii între ei, proporţia nu se schimbă.

b) Inversa unei proporţii $\left(\frac{b}{a} = \frac{d}{c}\right)$ este tot o proporţie.

c) Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor $(ad = bc)$.

d) Orice relaţie de forma $ad = bc$ (a, b, c, d diferiţi de zero) se poate scrie sub formă de proporţie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

4. Dacă $b = c$, atunci $b^2 = ad$ $(b = \sqrt{ad})$ şi b se numeşte *media geometrică* a numerelor a, d. Oricare din cele patru numere a, b, c, d se numeşte *a patra proporţională* a celorlalte trei.

5. Din proporţia

(20) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

rezultă proporțiile echivalente

$$(21)\quad \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{a \pm kb}{b} = \dfrac{c \pm kd}{d}; \quad \dfrac{a}{a \pm kb} = \dfrac{c}{c \pm kd}; \\ \dfrac{a \pm kc}{b \pm kd} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}; \quad \dfrac{a + kb}{a - kb} = \dfrac{c + kd}{c - kd}. \end{array}}$$

Presupunem că toate combinările făcute la numitor nu sînt nule.

6. Într-un șir de rapoarte egale, avem proprietatea

$$(22)\quad \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm \ldots \pm b_n}.}$$

7. Două numere x, y se zice că sînt *direct proporționale* dacă $x = ky$. Iar dacă (x', y'), (x'', y'') sînt două rînduri de valori ale celor două numere, atunci $x'' / x' = y'' / y'$. Analog, se zice că două numere sînt *invers proporționale* dacă $x = k / y$; cu aceleași notații, avem $x'' / x' = y' / y''$.

8. Pentru a împărți un număr A în *părți proporționale* cu numerele m_i $(i = 1, \ldots, n)$, vom nota părțile cu x_i și vom scrie

$$(23)\quad \boxed{\frac{x_1}{m_1} = \frac{x_2}{m_2} = \ldots = \frac{x_n}{m_n}; \; x_i = \frac{Am_i}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.}$$

Analog, pentru a împărți un număr A în *părți invers proporționale* cu numerele m_i $(i = 1, \ldots, n)$, vom nota părțile cu x_i și vom scrie

$$(24)\qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{1/x_1}{m_1} = \frac{1/x_2}{m_2} = \ldots = \frac{1/x_n}{m_n}; \\ &x_i = \frac{\dfrac{A}{m_i}}{\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} + \ldots + \dfrac{1}{m_n}}. \end{aligned}}$$

§ 1.4. Puteri și radicali

1. Prin „puterea n^a“ a unui număr a înțelegem numărul

$$(25)\qquad \boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n} \quad (n \in N).}$$

a se numește *baza*, iar $n \in N$ *exponent*. Prin „*rădăcina de ordinul n*“ sau „*radical de ordinul n*“ a unui număr $a > 0$, înțelegem un număr (în general irațional), pe care-l notăm cu

(25′)

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[m]{a},\ (a > 0)}$$

și care se bucură de proprietatea

(26)

$$(\sqrt[m]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a.$$

10^{12}	= 1 bilion
10^{9}	= 1 miliard
10^{6}	= 1 milion
10^{3}	= 1 mie
10^{2}	= 1 sută
10^{1}	= zece
10^{0}	= unitatea
10^{-1}	= o zecime
10^{-2}	= o sutime
10^{-3}	= o miime
10^{-6}	= o milionime

Mai general, vom nota cu

(27) $$\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n,\ (a > 0)}$$

și de asemenea

(28) $$\boxed{a^{\circ} = 1,\ a^{-p} = 1/a^p,\ (a > 0)\ (p \in Q).}$$

Prin aceste egalități, s-au definit puterile raționale ale numerelor reale strict pozitive. În (T. 3) se găsesc puterile lui 10 mai importante.

2. Avem proprietăţile $(a,\ b>0)$:

(29) $a^n a^m = a^{n+m};\ (a^n)^m = a^{nm};\ a^n/a^m = a^{n-m}.$

(30) $(ab)^n = a^n b^n;\ (a/b)^n = a^n/b^n.$

(31) $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab};\ \sqrt[m]{a/b} = \sqrt[m]{a^n}/\sqrt[m]{b}.$

(32) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};\ \sqrt[m]{ab^m} = b\sqrt[m]{a};$
$\sqrt[mp]{a^{mq}} = \sqrt[p]{a^q}.$

Observaţie. Simbolurile „putere“ şi „radical“ nu sînt distributive, adică

(33) $(a+b)^n \neq a^n + b^n;\ \sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$
$(a,\ b>0,\ n\neq 1).$

3. Dacă o fracţie are radicali la numitor, prin amplificarea fracţiei se poate face ca numitorul să nu mai conţină radicali: se spune că s-a *raţionalizat numitorul.*

Avem exemplele

(34) $$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b},\ \frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c},$$
$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}} = \frac{a(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{b\pm c}.$$

Radicalul suprapus $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ se poate transforma în radicali simpli în ipoteza că $A^2 - B = C^2$; avem formulele

$$(35) \qquad \boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2}(A + C)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(A - C)}.}$$

4. Pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr se procedează astfel.

a) Se împarte numărul în grupe de cîte două cifre de la dreapta la stînga și apoi sînt considerate grupele de la stînga la dreapta în ordine naturală.

b) Se caută cifra n_1 a cărui pătrat este cel mai mare care intră în prima grupă și care va fi prima cifră a rădăcinii pătrate.

c) Scădem pe n_1^2 din prima grupă.

d) La rezultat adăugăm grupa următoare și obținem un număr A.

e) La numărul $2n_1$ alăturăm un număr n_2 astfel ca $(2n_1)n_2 \times n_2 < A$ (n_2 este cel mai mare număr care se bucură de această proprietate).

f) n_2 va fi a doua cifră a rădăcinii.

g) Formăm numărul $A - (2n_1)n_2 \times n_2 = A_1$ și continuăm cu A_1 așa cum am procedat cu A scăzînd $(2n_1n_2)n_3 \times n_3$, ș.a.m.d.

Dacă ultimul rest este nul, extragerea de rădăcină pătrată se face exact și numărul se zice *pătrat per-*

fect; dacă nu, se pune o virgulă și se adaugă atîtea grupe de 00 cîte zecimale exacte dorim să scoatem. Un exemplu este dat în (T. 4) în care s-a scos rădăcina pătrată cu două zecimale exacte.

T. 4

$\sqrt{54123,0000}$	232,64
4	$43 \times 3 = 129$
141	$462 \times 2 = 924$
129	$4646 \times 6 = 27876$
1223	$46524 \times 4 = 186096$
924	
29900	
27876	
202400	
186096	
16304	

Proba se face ridicînd la pătrat numărul obținut și adăugînd restul rămas; rezultatul trebuie să fie numărul dat. (În T.4 avem $232,64^2 + 1,6304 = 54123$).

Observație. Pentru ca un număr natural să fie un pătrat perfect, trebuie ca ultima cifră să fie 0, 1, 4, 5, 6, 9.

2. ALGEBRĂ

§ 2.1. Mulțimi. Structuri

1. După *Cantor*, „o mulțime este o asamblare de anumite obiecte, bine distincte, ale intuiției sau gîndirii noastre, într-un singur tot“*). Exemple de mulțimi avem la § 1.1.1.

În calcule, o mulțime poate fi reprezentată printr-o literă mare E, sau prin $\{a, b, c, ..\}$ unde se pun în evidență elementele ei, sau prin $\{x \mid p\}$ unde x este un *element curent* iar p este proprietatea prin care se definește mulțimea. În interpretarea intuitivă a proprietăților unei mulțimi, se folosește *schema lui Euler* (fig. 1) în care se reprezintă mulțimea de bază E și diferite submulțimi ale ei prin punctele interioare unei curbe închise. În T. 5 sînt trecute primele definiții care se folosesc în calcule.

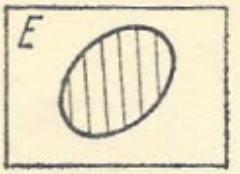
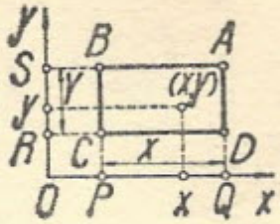
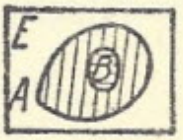
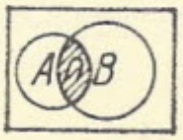
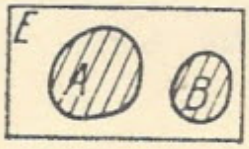


Fig. 1

*) Textul original: „Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (den Elementen der Menge) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“.

Simbolul	Definiţie, proprietăţi
$\rightarrow$	Semnul deducţiei logice
$\longleftrightarrow$	Semnul echivalenţei logice
$\forall$	„oricare ar fi“ sau „pentru orice“
$\exists a$	„există cel puţin un a astfel ca“
$\sim$	Semnul *relaţiei de echivalenţă* (are proprietăţile: $a \sim a$ (reflexivă), $a \sim b \longleftrightarrow b \sim a$ (simetrică), $a \sim b$, $b \sim c \longleftrightarrow a \sim c$ (tranzitivă)
$X \times Y$  Fig. 2	*Produsul cartezian* al mulţimilor X, Y şi reprezintă mulţimea $\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$. În figură, punctele dreptunghiului $ABCD$ reprezintă produsul cartezian al punctelor mulţimilor definite prin segmentele PQ, RS. Produsul mai multor mulţimi se notează cu $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$
$a \in E$	a aparţine lui E
$a \notin E$	a nu aparţine lui E

Simbolul	Definiţie, proprietăţi
$B \subseteq A$  Fig. 3	Mulţimea B *inclusă* sau identică cu A; A include sau este identică cu B. Aceasta înseamnă că dacă $b \in B$, atunci şi $b \in A$.
$B \subset A$	Incluziune strictă, adică există şi elemente $a \in A$ astfel ca $a \notin B$. B se numeşte *submulţime* a lui A.
$\bar{A}$ (sau $\complement A$) ($x \notin A$, $x \in M$) Flg. 4	Reprezintă *complementara* lui A faţă de E şi în figură este reprezentată prin partea haşurată.
$\varnothing$	Mulţimea vidă.
$A \cup B$ Fig. 5	*Reuniunea* mulţimilor A, B; reuniunea mai multor mulţimi se notează cu $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Simbolul	Definiție, proprietăți
$A \cap B$  Fig. 6	*Intersecția* mulțimilor A, B; intersecția mai multor mulțimi se notează cu $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
$A \cap B = \varnothing$  Fig. 7	Mulțimi disjuncte.

2. O mulțime $\mathcal{B}$ înzestrată cu operațiile $\cup$, $\cap$, $\sim$ se numește *algebră Boole* dacă, cu notațiile precedente, are următoarele proprietăți.

Pentru toate mulțimile A, B, $C \in \mathcal{B}$ avem:

(36)	$A \cup B \subseteq E$; $A \cap B \subseteq E$, $\tilde{A} \subseteq E$.
(37)	$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea).
(38)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativitatea).

(39) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributivitatea).

(40) $A \cup A = A \cap A = A$ (idempotența).

(41) $A \cup B = B$ dacă și numai dacă $A \cap B = A$
(compatibilitatea).

(42) $A \cup \tilde{A} = E, \quad A \cap \tilde{A} = \varnothing$.

Luînd aceste proprietăți ca axiome (nu sînt toate independente între ele) deducem de asemenea:

(43) $A \cup E = E$; (43′) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(44) $A \cap E = A$; (44′) $A \cup \varnothing = A$.

(45) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$
(absorbția).

(46) $A \cup B = A \cap B \to A = B$.

(47) $A \subseteq B$ și $B \subseteq A \to A = B$.

(48) $A \cap B = A$ sau (48′) $A \cup B = B \to A \subseteq B$

(49) $\varnothing \subset A \subset E$.

(50) $\tilde{\tilde{A}} = A$; (50′) $\tilde{E} = \varnothing$; (50″) $\tilde{\varnothing} = E$.

(51) $\widetilde{A \cup B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$; (51′) $\widetilde{A \cap B} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$
(Morgan).

(52) $\tilde{A} \cup B = E; \quad \tilde{A} \cap B = \varnothing \to A = B$.

(53) $A \cup (\tilde{A} \cap B) = A \cup B$;

(53′) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap \tilde{C}) =$
$= (A \cap C) \cup (B \cap \tilde{C})$.

3. Fie a, b două elemente oarecare aparţinînd unei mulţimi nevide $E(\forall a,\ b \in E)$; o operaţie care asociază acestui cuplu un nou element $c \in E$, se zice că este *operaţie internă* a lui E. Fiind date două mulţimi E, E' şi $a \in E$, $a' \in E'$, se numeşte *operaţie externă* faţă de E, o operaţie care asociind pe a şi a' între ele, conduce la elemente ale mulţimii E'; prima mulţime E primeşte numele de *mulţime de operatori*. Pentru operaţiile interne se foloseşte unul din simbolurile $\circ$, $*$, $\top$, $\perp$, ...

Cînd într-o mulţime E s-au definit una sau mai multe operaţii de compoziţie, interne sau externe, se zice că pe E s-a definit o *structură algebrică*.

4. Grup. O mulţime G nevidă se zice că formează *grup* dacă şi numai dacă faţă de o operaţie internă $\circ$ satisface următoarele axiome:

a) Dacă $a,\ b \in G$, atunci şi $a \circ b \in G$.

b) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (asociativitatea).

c) G conţine un *element neutru (element unitate)* astfel ca

$$u \circ a = a \circ u = a.$$

d) Oricare ar fi $a \in G$, avem în G un element a^{-1} numit *inversul* lui a, astfel ca

$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = u.$$

O mulţime care satisface numai axiomelor a), b) se numeşte *semigrup*. Dacă avem în plus $a \circ b = b \circ a$, grupul se numeşte *comutativ* sau *abelian*.

Atunci cînd operaţia grupului este *adunarea* se zice că grupul este *aditiv* (elementul neutru se numeşte „zero“, iar a^{-1} se notează cu $-a$), iar dacă operaţia este *înmulţirea*, grupul se numeşte *multiplicativ* (elementul neutru se notează cu „1“ iar inversul cu $1/a$). Un grup aditiv comutativ se numeşte *modul*.

Proprietăţi.

a) u este unic.

b) a^{-1} este unic.

c) ecuaţia $x \circ a = b$ are soluţia $x = b \circ a^{-1}$, iar ecuaţia $a \circ y = b$, are soluţia $y = a^{-1} \circ b$ (care se confundă în cazul grupurilor comutative).

d) $(a^{-1})^{-1} = a$.

e) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

5. Inel. O mulţime I se zice că formează *inel* dacă şi numai dacă posedă două operaţii numite *adunare* şi *înmulţire* reprezentate prin simbolurile $+$ şi $\cdot$ satisfăcînd axiomelor:

a) Faţă de operaţia adunării formează *modul* (§ 2.1.4) cu elementul neutru 0.

b) Faţă de operaţia înmulţirii formează semigrup (§ 2.1.4).

c) Cele două operaţii sînt legate între ele prin *axioma distributivităţii*

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \qquad c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Un inel se zice că este *comutativ* dacă operația înmulțirii este comutativă. Dacă inelul are element unitate față de înmulțire va avea și elemente inverse față de această operație, fără ca proprietatea să fie generală (de ex., elementul 0 nu are invers).

Proprietăți.

a) Adunarea are o operație inversă numită *scădere*.

b) Avem $a \cdot b = 0$, dacă $a = 0$ sau $b = 0$.

c) Invers, ecuația $a \cdot b = 0$ nu cere neapărat ca unul din factori să fie nul; elementele $a \neq 0$ care satisfac această ecuație se numesc *divizorii lui zero la stînga*, iar elementele $b \neq 0$ care verifică aceeași ecuație se numesc *divizorii lui zero la dreapta*. Nu orice inel are asemenea divizori; un inel comutativ cu element unitate față de înmulțire, dar fără divizori ai lui zero, se numește *domeniu de integritate* sau domeniu întreg.

6. Corp. O mulțime C se zice că formează *corp* dacă și numai dacă:

a) Este inel față de adunare și înmulțire (§ 2.1.5).

b) Formează grup față de înmulțire (§ 2.1.4).

Un corp are cel puțin două elemente u și 0, diferite între ele. Un corp comutativ față de înmulțire se numește *corp comutativ* sau *cîmp*.

Identităţi.

(54) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

(55) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

(56) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

(57) $a^3 \mp b^3 = (a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2)$.

(58) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

(59) $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \ldots - ab^{2m-1} + b^{2m})$.

(60) $a^{2m} - b^{2m} = (a^m - b^m)(a^m + b^m) = (a + b)(a^{2m-1} - a^{2m-2}b + \ldots + ab^{2m-2} - b^{2m-1})$.

(61) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

(62) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$.

(63) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$.

(64) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$.

Cîtul a două polinoame se numeşte *fracţie raţională*. În cazuri particulare, o fracţie raţională se reduce la un polinom. *Simplificarea* fracţiilor raţionale se face căutînd factorii comuni ai poli-

noamelor care formează *numărătorul* şi *numitorul* ei. Astfel, cîtul a două monoame este tot un monom, dacă monomul de la numărător conţine partea literară a celui de la numitor, factorii avînd exponenţii mai mari la numărător $\left(\text{de ex., } \frac{5a^5b^3c^4}{-3a^3bc^2} = -\frac{5}{3}a^2b^2c^2\right)$.

2. Obişnuit un polinom este ordonat după puterile descrescătoare (sau crescătoare) ale unei litere x care intră în termenii ce-l compun şi se notează cu $P(x)$. Cea mai mare putere n a lui x se numeşte *gradul* polinomului (n = gr. P). Monoamele ce-l compun se numesc *termenii* polinomului şi sînt cel mult în număr de $n + 1$; termenul ce nu-l conţine pe x se numeşte *termen liber*. Un asemenea polinom se scrie obişnuit sub forma

$$(65) \qquad \boxed{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_px^{n-p} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.}$$

Suma a două (sau a unui număr finit) polinoame este tot un polinom $S(x)$ astfel că gr. lui S este mai mic sau cel mult egal cu cel mai mare din gr. lui P şi Q. Produsul $\Pi(x)$ a două (sau a unui număr finit) polinoame este tot un polinom, astfel ca gr. $\Pi(x)$ = gr. P + gr. Q. Faţă

de operaţiile de adunare şi de înmulţire, mulţimea polinoamelor $P(x)$ formează *inel*.

3. Cîtul a două polinoame *nu* este în general un polinom. *Cîtul* şi *restul* împărţirii a două polinoame $P(x)$ (deîmpărţitul) şi $Q(x)$ (împărţitorul) sînt definite prin identitatea

$$\text{(66)} \qquad \begin{gathered} P(x) = Q(x)C(x) + R(x), \\ \text{unde} \\ \text{gr } P \geqslant \text{gr } \cdot Q;\ \text{gr } \cdot C = \text{gr } \cdot P - \text{gr. } Q; \\ \text{gr. } R < \text{gr. } Q. \end{gathered}$$

Dacă $Q(x) = x \pm a$, atunci $R = P(\pm a)$ şi împărţirea se face exact cînd $P(\pm a) = 0$. Identitatea (66) este unică. Algoritmul de calcul al lui $C(x)$ şi $R(x)$, cînd cunoaştem pe $P(x)$ şi Q(x) este acelaşi ca şi în aritmetică.

4. Se demonstrează că un polinom de gr. n se poate scrie întotdeauna în mod unic, sub forma

$$\text{(67)} \qquad \begin{gathered} P(x) = a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \ldots \\ \ldots (x - x_p)^{m_p}, \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n. \end{gathered}$$

Binoamele $x - x_1$, $x - x_2$, ..., $x - x_p$ jucînd rolul factorilor primi din aritmetică (x_1, x_2, ..., x_p sînt rădăcinile polinomului, diferite între ele). Fiind date două sau mai multe polinoame, prin **c.m.m.d.c. al lor** se înţelege polinomul $D(x)$ de

gr. cel mai mare care le divide în același timp pe toate. Calculul lui $D(x)$ se calculează prin metodele date la (§ 1.1.4). Analog se definește c.m.m.m.c a mai multor polinoame (§ 1.1.5).

5. Adunarea, înmulțirea și împărțirea fracțiilor raționale conduce tot la fracții raționale. Calculele cu fracțiile raționale se fac după aceleași metode cu cele întrebuințate în operațiile raționale în aritmetică (§ 1.2.2.3). Scriind identitatea (66) sub forma

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}} \tag{66'}$$

rezultă că o fracție rațională $P(x) / Q(x)$ pentru care gr. $P \geqslant$ gr. Q, se poate reduce întotdeauna la o fracție rațională $R(x) / Q(x)$, pentru care gr. $R <$ gr. Q.

6. Un polinom $P(x)$ scris sub forma (65), este *identic nul* (adică ia valoarea zero pentru orice x), dacă și numai dacă $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Dacă

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m, \tag{65'}$$

atunci polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ sînt identice între ele (adică iau aceleași valori oricare ar fi x), dacă și numai dacă $m = n$, $b_p = a_p$ ($p = 0, 1, \ldots, n$).

§. 2.3. Analiza combinatorie Binomul lui Newton

1. Fiind date n litere distincte în ordinea alfabetică, simbolizînd elementele unei mulțimi, cu ajutorul lor, luîndu-le cîte $p (p \leqslant n)$, se pot forma grupe care după natura lor se numesc:

a) *Aranjamente*, dacă grupele diferă între ele prin *ordinea* sau *natura* literelor care le compun. Numărul aranjamentelor este egal cu

$$(68) \quad \boxed{A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1).}$$

Tabelul (TA_n^p) se formează din (TA_n^{p-1}) adăugîndu-i la urma fiecărei grupe toate literele neîntrebuințate în grupă. Se ține seamă că (TA_n^1) este format din însăși literele date (vezi T. 6).

b) *Permutări*, dacă fiecare grupă conține toate literele, grupele diferind între ele prin *ordinea* literelor. Numărul permutărilor este egal cu

$$(69) \quad \boxed{P_n = n! = 1.2.3\ldots n;\ 0! = 1.}$$

Tabelul (TP_n) se formează din (TP_{n-1}) plasînd o a n-a literă la începutul, sfîrșitul și între fiecare din primele $n-1$ litere cu care este scris acest tabel (vezi T. 6). Să presupunem că cele

n litere sînt cifrele de la 1 la n. Două cifre (p, q) se zice că prezintă o *inversiune* dacă $p > q$. Dacă numărul tuturor inversiunilor unei permutări este cu soţ, vom spune că permutarea este *pară* şi *impară* în caz contrar. Dacă într-o permutare se schimbă două cifre între ele, permutarea din pară devine impară şi invers. Numărul permutărilor pare este egal cu numărul permutărilor impare şi egal cu $\frac{1}{2} n!$.

c) *Combinări*, dacă fiecare grupă conţine p $(p \leqslant n)$ litere, două grupe diferind între ele prin *natura* literelor care le conţin. Numărul combinărilor de n obiecte luate cîte p, este egal cu

$$(90) \qquad \boxed{\begin{aligned} C_n^p = \binom{n}{p} &= \frac{n(n-1)..(n-p+1)}{p!} = \\ &= \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_n^{n-p};\ C_n^0 = C_n^n = 1. \end{aligned}}$$

Tabelul combinărilor (TC_n^p) se formează din aproape în aproape adăugînd la urma fiecărei combinări din (TC_n^{p-1}) literele nefolosite în ordinea alfabetică faţă de ultima literă. Tabelul (TC_n^1) sînt însăşi literele date (vezi T. 6)

Avem formulele:

(91)	$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$.
(92)	$C_n^{m+p} + C_p^1 C_n^{m+p-1} + C_p^2 C_n^{m+p-2} + \ldots + C_n^m = C_{n+p}^{m+p}$.
(93)	$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.
(94)	$1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

T. 6

TA_4^1	*a, b, c, d*
TA_4^2	*ab, ac, ad; ba, bc, bd; ca, cb, cd; da, db, dc.*
TA_4^3	*abc, abd; acb, acd; adb, adc; bac, bad; bca, bcd; bdc, bda; cab, cad; cba, cbd; cda, cdb; dab, dac; dba, dbc; dca, dcb.*
TP_2	*ab, ba.*
TP_3	*cab, acb, abc; cba, bca, bac.*
TP_4	*dcab, cdab, cadb; cabd; dacb, adcb, acdb, acbd; dabc, adbc, abdc, abcd; dcba, cdba, cbda, cbad; dbca, bdca, bcda, bcad; dbac, bdac badc, bacd.*
TC_4^1	*a, b, c, d.*
TC_4^2	*ab, ac, ad; bc, bd; cd.*
TC_4^3	*abc, abd; acd; bcd.*

2. Binomul lui Newton. Dacă $n \in N$, atunci

(95)
$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + \\ + C_n^{n-1} x a^{n-1} + a^n = \sum_{p=1}^{n} C_n^p x^{n-p} a^p$$

Pentru $n = 2, 3$ avem formulele (§ 2.2. (54), (55)); pentru $3 < n \leqslant 10$, coeficienţii binomiali C_n^p sînt trecuţi în (T. 7)

T. 7

$n = 4$	1	4	6	4	1						
$n = 5$	1	5	10	10	5	1					
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1				
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1			
$n = 8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
$n = 9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
$n = 10$	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Proprietăţi.

a) Binomul lui Newton are $n + 1$ termeni.

b) În fiecare termen suma puterilor lui x și a este egală cu n.

c) Coeficienții egali depărtați de extremi din dezvoltare sînt egali; primul și ultimul sînt egali cu unitatea.

d) Coeficientul unui termen se găsește din precedentul înmulțindu-l cu puterea lui x și împărțindu-l cu puterea lui a mărită cu o unitate (este vorba de puterile lui x și a din termenul al cărui coeficient îl căutăm).

3. Binomul lui Newton se generalizează prin formula

$$(a + b + \ldots + l)^n = \sum \frac{n!}{p!q!\ldots s!} a^p b^q \ldots l^s. \tag{96}$$

însumarea din dreapta făcîndu-se luînd pentru $p, q, \ldots, s$ toate valorile întregi pozitive astfel ca $p + q + \ldots + s = n$. În particular, avem

$$(a + b + \ldots + l)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab, \tag{97}$$

$$(a + b + \ldots + l)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2 b + 6\sum abc, \tag{97'}$$

însumările făcîndu-se la toţi termenii de tipul indicat după $\sum$.

4. Sumele

$$S_p = 1^p + 2^p + \ldots + n^p \tag{98}$$

se calculează din aproape în aproape cu ajutorul relaţiei de recurenţă

$$\boxed{C_{p+1}^1 S_p + C_{p+1}^2 S_{p-1} + \ldots + C_{p+1}^p S_1 = (n+1)[(n+1)^p - 1].} \tag{99}$$

Se găsesc valorile

$$S_1 = \frac{1}{2} n(n+1),$$

$$S_2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

(100)

$$S_3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2,$$

$$S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Cu ajutorul acestor sume, se pot calcula sume de forma $\sum_{p=1}^{n} P(p)$, unde $P(p)$ este un polinom în p ($p \in N$), după metoda

$$\sum_{p=1}^{n} p(p+1)(p+2) = \sum_{p=1}^{n} (p^3 + 3p^2 + 2p) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} p^3 + 3 \sum_{p=1}^{n} p^2 + 2 \sum_{p=1}^{n} p = S_3 + 3S_2 + 2S_1 =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3).$$

5. Progresii.

a) Se numește *progresie aritmetică* un șir de numere (§ 7.1.2) în care un termen se deduce din precedentul adăugîndu-i un număr fix numit *rație*. O progresie aritmetică este cunoscută cînd îi cunoaștem primul termen a și rația r; expresia ei este

$$\div a,\ a + r,\ a + 2r,\ a + 3r,\ \ldots$$

al n-lea termen avînd ca expresie

$$a_n = a + (n-1)r.$$

Într-o progresie aritmetică cu n termeni, suma termenilor egal depărtați de extremi este con-

stantă. Suma tuturor termenilor unei asemenea progresii este egală cu

(101) $S_n = a + (a + r) + \ldots + [a + (n - 1)r] =$

$$= \frac{1}{2} n(a + a_n) = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)r].$$

b Se numește *progresie geometrică* un șir de numere în care un termen se deduce din precedentul prin înmulțirea cu un număr fix numit *rație*. O progresie geometrică este cunoscută cînd îi cunoaștem primul termen a și rația q; expresia ei este

$$\therefore a, aq, aq^2, aq^3, \ldots$$

al n-lea termen avînd ca expresie

$$a_n = aq^{n-1}.$$

Dacă $q > 1$, termenii progresiei cresc, iar dacă $0 < q < 1$, descresc, suma a n termeni dintr-o progresie geometrică este egală cu

$$S_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = a\frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Dacă $|q| < 1$, atunci avem suma progresiei infinite

(102) $$S = a + aq + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1 - q}$$

(prima parte reprezintă $\lim_{n\to\infty} S_n$ cînd n tinde către infinit § .7.3.1).

§ 2.4. Ecuații particulare

1. Se numește *ecuație algebrică* o ecuație de forma $P(x) = 0$, unde $P(x)$ este un polinom de gradul n. Se zice că x_0 este o *rădăcină* sau un *zero* al ecuației, dacă $P(x_0) = 0$; x_0 se numește o rădăcină de ord. m a polinomului $P(x)$, sau a ecuației $P(x) = 0$, dacă:

$$P(x) = (x - x_0)^m P_1(x), \tag{103}$$

$P_1(x)$ fiind un polinom de gr. $(n-m)$. O ecuație algebrică de gr. n are n *rădăcini*. La (§ 7.7) se găsește teoria generală a ecuațiilor algebrice.

2. Ecuații de gradul 1 sînt ecuațiile de tipul:

(104) $ax + b = 0\ (a \neq 0)$ și au soluția unică $x_0 = -b/a$.

3. Ecuații de gradul 2 sînt de tipul:

(105) $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ și au soluțiile
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

(106) $ax^2 + 2b'x + c = 0\ (a \neq 0)$ are soluțiile
$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a},$$

(107) $x^2 + 2b'x + c = 0$ are soluţiile

$$x_{1,2} = -b' \pm \sqrt{b'^2 - c}.$$

Expresia $R = b^2 - 4ac$ se numeşte *realizantul* sau *discriminantul* ecuaţiei (105). Dacă x_1 corespunde semnului +, iar x_2 semnului −, în soluţii, avem discuţia:

T. 8.

$R = b^2 - 4ac$	$S = x_1 + x_2 = -b/a$	$P = x_1 x_2 = c/a$	Natura rădăcinilor
−			x_1, x_2 complexe conjugate
+	+	+	x_1, x_2 reale pozitive
+	−	+	x_1, x_2 reale, ambele negative
+	+	−	x_1, x_2 reale, de semne contrare, cea pozitivă mai mare în valoare absolută ca cea negativă
+	−	−	x_1, x_2 reale, de semne contrare, cea negativă mai mare în valoare absolută ca cea pozitivă
0	±	±	o rădăcină dublă reală, $x_1 = x_2$.

4. Ecuații bipătrate sînt ecuațiile de forma

$$(108)\qquad \boxed{\begin{array}{l} ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ și au soluțiile} \\ x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \end{array}}$$

A se vedea și § 3.4.4

5. Ecuații reciproce sînt ecuațiile în care coeficienții egal depărtați de extremi sînt egali ($a_r = a_{n-r}$). Dacă ecuația este de grad impar, ea admite rădăcina $x = -1$ și împărțind ecuația cu $x + 1$, ne rămîne o ecuație reciprocă de grad cu soț. Dacă o ecuație reciprocă admite rădăcina a admite și rădăcina $1/a$. Pentru a rezolva o asemenea ecuație de grad cu soț se face substituția

$$(109)\qquad x + 1/x = y,$$

care ridicată succesiv la puterile 2, 3, ..., ne spune că $x^p + 1/x^p = A(y)$ (polinom în y). Se împarte ecuația cu $x^{n/2}$ și ținînd seamă de rezultatul precedent, ecuația se reduce la o ecuație algebrică $B(y) = 0$ de gr. $\frac{1}{2}n$. La fiecare rădăcină a acestei ecuații, rezultă din (109) două rădăcini ale ecuației inițiale. De ex., pentru ecuația de gr. 4, avem

(110)
$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0;$$
$$a_0(x^2 + 1/x^2) + a_1(x + 1/x) + a_2 = 0;$$
$$x^2 + 1/x^2 = y^2 - 2; \quad a_0y^2 + a_1y + (a_2 - 2a_0) = 0 \text{ cu rădăcinile } y_1, y_2;$$
$$x^2 - y_1x + 1 = 0; \; x^2 - y_2x + 1 = 0 \text{ etc.}$$

6. Sisteme de ecuații. Fiind date două ecuații cu două necunoscute $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$, respectiv de gr. m și n, a rezolva sistemul format de ele, înseamnă a găsi perechile de numere (x, y) care să le verifice simultan. Pentru calcul, se *elimină* una din necunoscute scoțîndu-i valoarea dintr-una din ecuații. De ex., scoțînd pe $y = R(x)$ din a doua și înlocuindu-l în prima, se obține o ecuație numai în x, $S(x) = 0$. Rezolvînd această ecuație, găsim rădăcinile x_k, cu ajutorul cărora se formează perechile $[x_k, y_k = R(x_k)]$ care vor fi soluțiile sistemului dat. Sistemul admite în general maximum mn soluții reale sau complexe. Metoda se aplică fără nici o dificultate dacă una din ecuațiile date este de gr. 1 într-una din necunoscute. Uneori este bine ca înainte de a începe calculul, să se înlocuiască ecuațiile date prin combinații care pot conduce la ecuații mai simple decît cele inițiale.

7. Fiind date două ecuații algebrice $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ (P și Q două polinoame) se numește *eliminantul* lor Δ, rezultatul eliminării lui x între

cele două ecuații. Condiția ca cele două ecuații să aibă o rădăcină comună este $\Delta = 0$. Astfel, eliminantul ecuațiilor

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

este

$$\Delta = (a'c - ac')^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c).$$

§ 2.5 Inegalități

1. În urma definiției (§ 1.1.1), pe lîngă inegalitățile (17), (18), (19), (19′) avem de asemenea:

(111) Dacă $0 < a \leqslant b$, atunci $a^p \leqslant b^p (p \in R^+)$, $\sqrt[q]{a} \leqslant \sqrt[q]{b}$ $(q \in N)$.

(112) $|a + b + \ldots + l| \leqslant |a| + |b| + \ldots + |l|$,

(113) Dacă $a < b$ și $a, b, m, n > 0$, atunci $a < \dfrac{ma + nb}{m + n} < b$.

(114) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

(115) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$.

(116) $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, $(a_h > 0)$.

(117) $(1+a)(1+b)\ldots(1+l) > 1+(a+b+\ldots+l)$, $(a \geqslant 0, \ldots, l \geqslant 0)$.

(118) $1-a^n < n(1-a)$ dacă $0<a<1$ şi

(18′) $a^n - 1 > n(a-1)$ dacă $a>1$.

(119) $(1-a)^n > 1 - na + \frac{1}{2}n(n-1)a^2 - \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3$, $(3 < n \in N, 0<a<1)$.

(120) $n^{n+1} > (n+1)^n$, $(3 < n \in N)$.

(121) $\sqrt{n^n} < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

(122) $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2) \geqslant (a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\ldots+a_n\alpha_n)^2$.

(123) Dacă $0<a<1$, $a^x > a^y$, cînd $x<y$, iar

(123′) dacă $a>1$, $a^x < a^y$ cînd $x<y$ (§ 7.2)

(124) Dacă $0<a<1$, $\log_a x > \log_a y$, cînd $x<y$, iar

(124′) dacă $a>1$, $\log_a x < \log_a y$ cînd $x<y$ (§ 7.2).

2. $\mathbf{E = ax + b}$, dacă $x_0 = -b/a$, atunci E are acelaşi semn cu a, dacă $x > x_0$ şi semn contrar, dacă $x < x_0$.

3. $\mathbf{T = ax^2 + bx + c}$. Dacă $b^2 - 4ac > 0$, ecuația are două rădăcini reale și T va avea același semn cu a, dacă x este în afara rădăcinilor, și semn contrar cu a, cînd x este între rădăcini; cînd x este una din rădăcini, $T = 0$. Dacă $b^2 - 4ac \leqslant 0$, T are același semn cu a, oricare ar fi x; cînd $b^2 - 4ac = 0$, $T = 0$, cînd x este egal cu unica rădăcină (dublă) a ecuației.

4. Pentru a studia semnul unui polinom $P(x)$, îl descompunem în factori primi reali (§ 7.7 (343)) și suprimăm dintre ei pe cei care provin din rădăcini complexe, iar dintre cei care provin din rădăcini reale, păstrăm numai pe cei care sînt la puteri impare; polinomul rămas $P_1(x)$ are același semn cu $P(x)$. Se așază rădăcinile acestuia în ordinea mărimii și se caută semnul în intervalul $(-\infty, x_1)$, x_1 fiind cea mai mică rădăcină reală. În intervalele următoare, $P(x)$ va avea semne alternate (de ex., pentru semnul polinomului $P(x) = -2x^3 (x - 1)^2 (x - 2)^3 (x - 3)^5 (x^2 + x + 1)^3$, vom considera polinomul $P_1(x) = -x(x - 2)(x - 3)$ care este pozitiv în intervalele $(-\infty, 0)$, $(2, 3)$ și negativ în intervalele $(0, 2)$, $(3, +\infty)$.

Observație. În considerațiile de mai sus, coeficienții polinoamelor considerate precum și x, sînt presupuși numere reale.

§ 2.6. Determinanți

1. Un determinant de ord. n este un tablou pătratic cu n *linii* și n *coloane* căruia i se atribuie valoarea

(125)

$$D = |a_h^k| = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & & a_n^n \end{vmatrix} = \sum (-1)^r a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n};$$

suma din dreapta are $n!$ termeni care se obțin luînd pentru $(k_1 k_2 \dots k_n)$ o permutare a primelor n numere, iar r reprezintă numărul de inversiuni ale acesteia (§ 2.3.1 b). Determinantul are n^2 *elemente* a_h^k; acest element este la intersecția liniei h cu coloana k; elementele care se găsesc pe linia care unește pe a_1^1 cu a_n^n se zice că formează *diagonala principală*. Suprimînd din determinant linia h și coloana k ne rămîne un determinant de ord. $(n-1)$, care se numește *minorul lui* D *relativ la elementul* a_h^k și se notează cu D_h^k; $A_h^k = (-1)^{h+k} D_h^k$ se numește *cofactorul elementului* a_h^k din D. Avem

(126) $$\sum_{h=1}^{n} a_h^k A_h^k = \sum_{k=1}^{n} a_h^k A_h^k = D,$$

(127) $$\sum_{h=1}^{n} a_h^l A_h^m = \sum_{k=1}^{n} a_l^k A_m^k = 0 \ (l \neq m).$$

În particular

(128) $$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b,$$

(129)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - (cb'a'' - c'b''a - c''ba')$$ (regula lui *Sarrus*).

2. *Proprietăți.*

a) Un determinant este nul dacă: toate elementele unei linii sau coloane sînt nule; elementele corespunzătoare a două linii (sau coloane) sînt egale sau proporționale; elementele unei linii (sau coloane) se exprimă liniar cu ajutorul a p linii (respectiv coloane), adică

$$a_h^k = \lambda_1 a_{h_1}^k + \lambda_2 a_{h_2}^k + \ldots + \lambda_p a_{h_p}^k \quad \text{sau}$$

(130)

$$a_h^k = \mu_1 a_h^{k_1} + \mu_2 a_h^{k_2} + \ldots + \mu_p a_h^{k_p}.$$

b) Valoarea unui determinant nu se schimbă cînd se fac următoarele operaţii: se schimbă liniile în coloane şi coloanele în linii, fără a schimba ordinea lor; se adună la elementele unei linii (sau coloane) alte linii (sau coloane) înmulţite cu cîte un factor ales după voie.

c) Un determinant îşi schimbă semnul dacă schimbăm între ele două linii (sau coloane).

d) Dacă elementele unei linii (sau coloane) au un factor comun, acesta se scoate factor comun în faţa determinantului.

e) Dacă elementele unei linii (sau coloane) sînt sume de p termeni, determinantul se descompune într-o sumă de p determinanţi după regula

$$(131)\qquad \begin{vmatrix} a_1^1 \dots \sum_{i=1}^{p} b_1^i \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 \dots \sum_{i=1}^{p} b_n^i \dots a_n^n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{p} \begin{vmatrix} a_1^1 \dots b_1^i \dots a_1^n \\ \dots\dots\dots \\ a_n^1 \dots b_n^i \dots a_n^n \end{vmatrix}$$

3. Produsul a doi determinanţi $D_1 = |a_h^k|$, $D_2 = |b_h^k|$ este tot un determinant $D_1 D_2 = |c_h^k|$ ale cărui elemente se calculează după regula

$$(132)\qquad c_h^k = a_1^k b_h^1 + a_2^k b_h^2 + \dots + a_n^k b_h^n.$$

4. Determinanți particulari.

a) Determinanți *triunghiulari* care au toate elementele de deasupra sau dedesubtul diagonalei principale nule (adică $a_h^k = 0$, cînd $h < k$); valoarea lor este egală cu produsul elementelor de pe diagonală.

b) Determinanți *diagonali* care au toate elementele de deasupra și dedesubtul diagonalei principale nule (adică $a_h^k = 0$ cînd $h \neq k$); valoarea lor este egală cu produsul elementelor de pe diagonală.

c) Determinanți *simetrici* ale căror elemente satisfac relația $a_h^k = a_k^h$.

d) Determinanți *antisimetrici* ale căror elemente satisfac relația $a_h^k = -a_k^h$ $(a_h^h = 0)$. Un determinant antisimetric de ordin impar are valoarea zero; un determinnt antisimetric de ordin par se poate scrie sub forma unui pătrat perfect dintr-un polinom format cu elementele sale.

e) Determinanți *Vandermonde*, care sînt de forma

(133)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & \dots & k & l \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & \dots & k^{n-1} & l^{n-1} \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\dots(l-a)\cdot (c-b)\dots(l-b)\cdot \dots\dots\dots \cdot (l-k)$$

f) Determinanți *circulari* care sînt de forma (134)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \end{vmatrix} = \varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \dots \varphi(\alpha_n),$$

unde α_i sînt rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$ (§ 3.4.3 c), iar

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}.$$

g) Determinantul Δ format cu cofactorii lui $D \neq 0$ (§ 2.6.1), se numește *reciprocul* lui D și are valoarea $\Delta = D^{n-1}$.

§ 2.7. Matrice

1. O matrice este un tablou de forma*)

$$(135) \qquad A = [a_h^k] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m^1 & a_m^2 & \dots & a_m^n \end{bmatrix},$$

pentru care vom folosi aceleași numiri ca la determinanți. Matricea considerată se zice că este

*) Se mai folosește simbolul $\| a_h^k \|$ sau (a_h^k).

dreptunghiulară și are ordinul $m \times n$, unde m este numărul *liniilor* iar n numărul *coloanelor*. Dacă $m = n$, matricea se numește *pătratică de ord. n*. Elementele matricei sînt numere reale (se pot considera matrice cu elemente numere complexe sau mai general elementele unui cîmp oarecare). Cu *elementele* unei matrice pătrate se poate forma un determinant $D = |\, a_h^k \,|$ numit *determinantul matricei*. Dacă $D \neq 0$, matricea se zice că este *nesingulară* și *singulară* dacă $D = 0$. Dacă r este ordinul cel mai mare al determinanților ce se pot construi cu elementele matricei A, diferiți de zero, se zice că matricea este de *rangul r* (§ 2.7.4 n).

Se numește *transpusa* matricei $A = [a_h^k]$, matricea $A' = [a_h^k]$ și are ordinul $n \times m$. Două matrice transpuse au același rang.

2. Matrice particulare.

a) *Matricea nulă* care are toate elementele nule; o matrice nulă poate avea orice ordin: $O = [0]$.

b) Matricele $1 \times n$ care au o singură linie se numesc *matrice linie*.

c) Matricele $m \times 1$ care au o singură coloană se numesc *matrice coloană*; matricele coloană sînt transpusele matricelor linie și invers.

d) *Matricele pătrate* pot fi *triunghiulare* ($a_h^k = 0$ cînd $h < k$) sau *diagonale* ($a_h^k = 0$ cînd $h \neq k$).

e) *Matrice unitate* $I_n = I$ (*n* fiind ordinul) pentru care $a_h^k = \delta_h^k$ (δ_h^k este *simbolul lui Kronecker* care are valoarea 1 cînd $h = k$ şi 0 cînd $h \neq k$).

f) *Simetrice* ($a_h^k = a_k^h$ sau $A = A'$) sau *antisimetrice* ($a_h^k = -a_k^h$ sau $A = -A'$).

3. Operaţii cu matrice.

a) Două matrice $A = [a_h^k]$, $B = [b_h^k]$ de *acelaşi ordin* sînt egale dacă şi numai dacă $a_h^k = b_h^k$.

b) Suma a două matrice $A = [a_h^k]$, $B = [b_h^k]$ de acelaşi ordin este o matrice de acelaşi ordin $A + B = [a_h^k + b_h^k]$.

c) Produsul unei matrice $A = [a_h^k]$ cu un număr *m* este o matrice de acelaşi ordin $mA = [ma_h^k]$ (de ex., $-A = [-a_h^k]$).

d) Produsul unei matrice $A = [a_h^k]$ de ord. $m \times n$ cu o matrice $B = [b_k^l]$ de ord. $n \times p$, este matricea $AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_h^k b_k^l\right]$ de ord. $m \times p$; produsul a două matrice se defineşte, numai atunci, cînd ordinele sînt de forma indicată şi în general nu este comutativ. Două matrice pătrate, de acelaşi ordin, pot fi întotdeauna înmulţite între ele.

e) Dacă $A = [a_h^k]$ este o matrice pătratică nesingulară se numește *matrice inversă*, matricea $A^{-1} = [A_h^k/|a_h^k|]$, unde A_h^k este cofactorul elementului a_h^k în determinantul $|a_h^k|$ (§ 2.6.1). Avem

(136) $$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

4. Proprietăți.

a) $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$.

b) $m(nA) = n(mA) = (mn)A$.

c) $m(AB) = (mA)B = A(mB)$.

d) $m(A + B) = mA + mB$, $(m + n)A = mA + nA$.

e) Înmulțirea a două matrice nu se poate efectua decît dacă prima are același număr de coloane cu numărul liniilor celei de-a doua (§ 2.7.3 d). Dacă ord. $A = m \times n$, ord. $B = n \times p$, ord. $C = p \times q$, atunci $A(BC) = (AB)C$ și reprezintă o matrice de ord. $m \times q$.

f) $A(B + C) = AB + AC$, $(B + C)A = BA + CA$.

g) Dacă A, B sînt două matrice pătrate de același ordin, atunci $|AB| = |A| \cdot |B|$ unde $|A|$ este determinantul matricei A; această proprietate spune că produsul a două matrice

pătrate nesingulare este o matrice nesingulară.

h) $A + 0 = A$, $A + (-A) = 0$, $0A = B\,0 = 0$.

i) $AI = IA = A$.

j) $(A + B)' = A' + B'$, $(mA)' = mA'$, $(AB)' = B'A'$, $(A)')' = A$.

k) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(mA)^{-1} = m^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

l) Puterile unei matrice pătrate se definesc prin egalitățile

$$AA = A^2,\ A^2A = A^3,\ \ldots,\ A^nA = A^{n+1},\ \ldots$$

și se bucură de proprietățile § 1.4.2.

m) Matricele formează un inel care admite divizori ai lui zero (§ 2.1.5).

n) *Teorema lui Kronecker*: dacă cu liniile și coloanele unei matrice A putem forma un determinant $d \neq 0$ de ord. r și dacă toți determinanții de ord. $(r + 1)$ ce se pot forma în același mod sînt nuli, atunci rangul matricei este r. Deci, pentru a determina rangul unei matrice, se consideră un determinant de ord. 2, $D_2 \neq 0$; apoi cu el formăm un determinant de ord. 3, $D_3 \neq 0$, ș.a.m.d. pînă la un $D_r \neq 0$, cînd toți determinanții de ord. $(r + 1)$ sînt nuli.

§ 2.8. Sisteme de ecuații liniare

1. Un sistem de ecuații liniare este de forma

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_h^k x_k = b_h \quad (h = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)} \tag{137}$$

conține m ecuații cu n *necunoscute* x_k. *Coeficienții necunoscutelor* a_h^k și *termenii liberi* b_h sînt considerați numere reale sau complexe. Sistemul se poate scrie sub forma

$$\boxed{AX = B,} \tag{137'}$$

unde $A = |a_h^k|$, $X = [x_k]$, $B = [b_h]$, ultimele două fiind matrice coloană. Se numește *soluție* un sistem de valori $x_k = x_k^0$, care *verifică* sistemul dat. Dacă sistemul admite cel puțin o soluție se zice că este *compatibil* și *incompatibil* în caz contrar. Dacă admite o *singură* soluție se zice că este *compatibil determinat* și *compatibil nedeterminat* cînd admite mai multe soluții.

2. Regula lui Cramer. Dacă $m = n$ și $D = |a_h^k| \neq 0$, sistemul se numește *normal* și este compatibil determinat. Soluția sistemului este

$$x_k = D_k / D, \tag{138}$$

unde D_k este determinantul ce se obține din D înlocuind coloana k cu matricea B. Soluția se poate scrie și sub forma matriceală

(138′) $$X = A^{-1}B.$$

Făcînd produsul matriceal din partea dreaptă (§ 2.7.3 d), rezultă o matrice coloană ale cărei elemente sînt valorile necunoscutelor.

3. Teorema lui Kroneker-Capelli. Se consideră pe lîngă matricea A, matricea A_1 care se obține din A mărginind-o la dreapta cu coloana B. *Sistemul (137) este compatibil dacă și numai dacă matricele A și A_1 au același rang r.* Calculul soluțiilor se face prin metoda următoare:

a) Se determină determinantul D_r, care dă rangul sistemului (§ 2.7.4 p), numit *determinant principal;* necunoscutele și ecuațiile ale căror coeficienți intră în D_r se numesc *principale*, iar celelalte *secundare*.

b) Dacă $n = r$, sistemul este compatibil determinat și soluția se obține rezolvînd prin regula lui Cramer sistemul ai cărui coeficienți intră în D_r.

c) Dacă $r < n$, ca și la cazul precedent se rezolvă același sistem după ce în prealabil s-au trecut în dreapta necunoscutele secundare. Soluția sistemului depinde de valorile acestor $n - r$ necunoscute, care pot lua valori arbitrare. Vom spune că sistemul are ∞^{n-r} soluții.

Observație. Se numește *determinant caracteristic* un determinant de ord. $(r + 1)$ obținut din D_r, mărginindu-l cu o linie formată din coeficienții necunoscutelor principale dintr-o ecuație secundară și cu o coloană formată cu termenii liberi ai ecuațiilor folosite. Teorema de mai sus exprimă că sistemul considerat este compatibil, dacă și numai dacă *toți* determinanții caracteristici sînt nuli.

4. Sisteme omogene se numesc sistemele pentru care $B = 0$ $(b_h = 0,\ 1 \leqslant h \leqslant m)$. Un asemenea sistem admite întotdeauna soluția banală $x_k = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Dacă $m = n$ și dacă $D = 0$, atunci sistemul este compatibil nedeterminat admițînd soluțiile

$$(139)\quad \frac{x_1}{A_h^1} = \frac{x_2}{A_h^2} = \ldots = \frac{x_n}{A_h^n} = u;\ x_k = uA_h^k,$$

unde u este un parametru arbitrar, A_h^k cofactorii lui D (§ 2.6.1), presupunînd că cel puțin unul este diferit de zero, iar h o linie oarecare a lui D.

Aceeași soluție admite un sistem omogen cu n necunoscute și $(n - 1)$ ecuații, a cărui matrice este de rangul $(n - 1)$.

3. TRIGONOMETRIE

§ 3.1. Funcții trigonometrice directe și inverse

1. Cerc trigonometric este cercul care are următoarele proprietăți (fig. 8):

a) Orice lungime din planul său este măsurată cu raza luată ca unitate de măsură; pentru acest motiv, se zice că are raza egală cu 1.

b) Este împărțit în patru cadrane de două diametre perpendiculare AA', BB' considerate ca axe de coordonate.

c) Este orientat, fiind considerat ca descris de un mobil care pleacă din originea A*) și merge în sens invers acelor unui ceasornic, sens considerat pozitiv; sensul opus este considerat negativ.

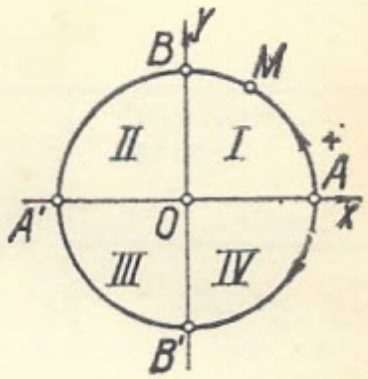


Fig. 8

*) Orice arc de pe cercul trigonometric este considerat ca având originea în A.

Dacă exprimăm arcul $\widehat{AM} = n^\circ$ în grade (§ 4.2.1), punctul M este considerat, mai general, ca fiind extremitatea arcelor $n^\circ + 360^\circ \cdot k$ $(k \in Z)$ toate cu originea în A. Același arc exprimat în unități de lungime $\widehat{AM} = n^r$ se zice că este exprimat în *radiani*, iar punctul M este considerat ca extremitatea arcelor $n^r + 2k\pi$ $(k \in Z)$ având ca origine pe A. Avem relația

$$180^\circ n^r = \pi n^\circ.$$

În particular, arcul de 1^r (a cărui măsură este egală cu raza) satisface dublei inegalități $58^\circ 10' < 1^r < 58^\circ 20'$.

Extremitățile celor patru cadrane au valorile trecute în T. 9.

T. 9.

Arcul \ extremitatea	A	B	A'	B'
În grade	0° sau $360^\circ k$	90° sau $90^\circ(4k+1)$	180° sau $180^\circ(2k+1$	270° sau $90^\circ(4k+3)$
În radiani	0 sau $2k\pi$	$\frac{1}{2}\pi$ sau $\frac{1}{2}(4k+1)\pi$	π sau $(2k+1)\pi$	$\frac{3}{2}\pi$ sau $\frac{1}{2}(4k+3)\pi$

2. Funcţiile*) trigonometrice directe ale unui arc oarecare x (fig. 9) au valorile (exprimate cu raza cercului), $x = \widehat{AOM} = \widehat{AM}$:

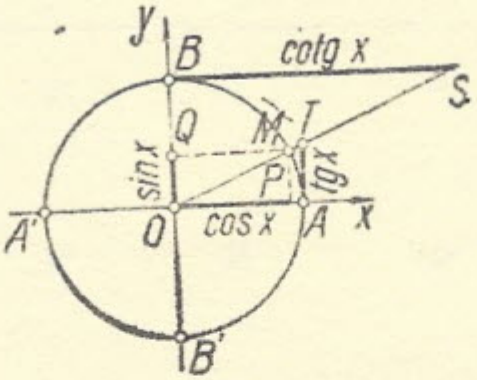


Fig. 9

(140)
$$\boxed{\begin{aligned} \overline{OQ} &= \sin x, \\ \overline{OP} &= \cos x, \\ \overline{AT} &= \operatorname{tg} x, \\ \overline{BS} &= \operatorname{cotg} x, \\ \overline{OT} &= \sec x, \\ \overline{OS} &= \operatorname{cosec} x. \end{aligned}}$$

Variaţiile primelor patru funcţii sînt trecute în tabelele şi graficele ce urmează:

* Pentru noţiunea de funcţie a se vedea § 7.1.1.

x	0		$\frac{1}{2}\pi$		π	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$
$\operatorname{tg} x$	0	$\nearrow$	$+\infty/-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$\operatorname{cotg} x$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty/+\infty$	

$\frac{3}{2}\pi$		π
-1	$\nearrow$	0
0	$\nearrow$	1
$+\infty / -\infty$	$\nearrow$	0
0	$\searrow$	$-\infty$

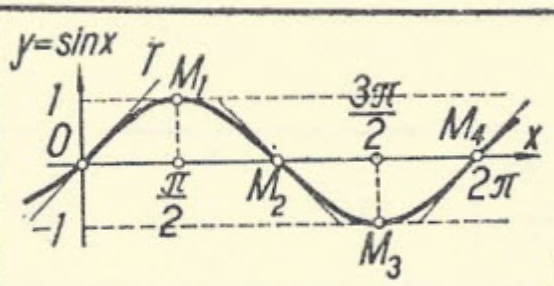


Fig. 10

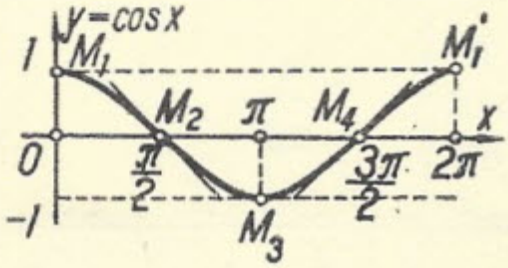


Fig 11

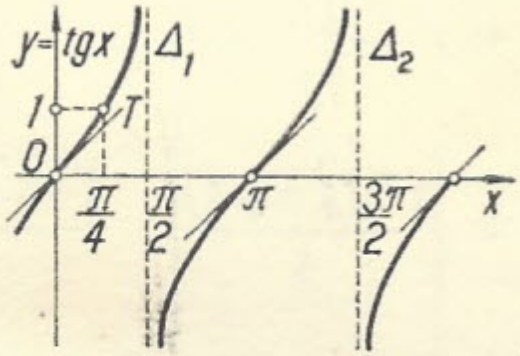


Fig 12

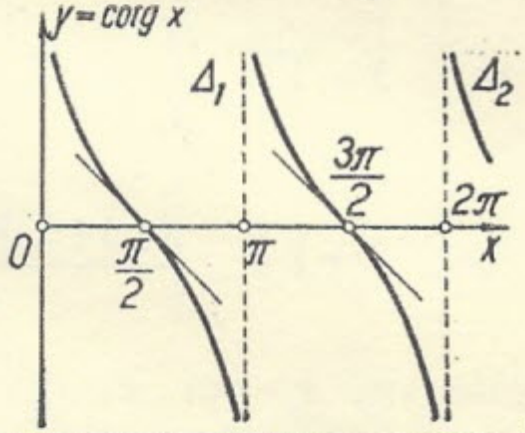


Fig. 13

x în grade	$0°$ sau $360°$	$15°$	$18°$	$22°30'$	$30°$
x în rad.	0 sau 2π	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$
$\sin x$	1	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} x$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{80}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{cotg} x$	$\pm\infty$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$

Funcţiile sin x, cos x, tg x, cotg x studiate poartă acelaşi nume şi sînt definite pe R.

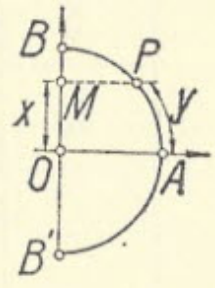
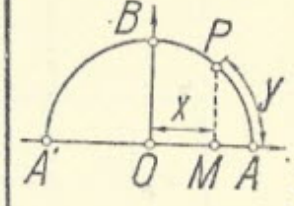
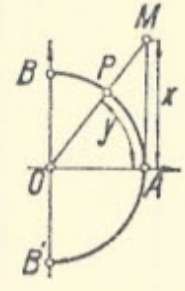
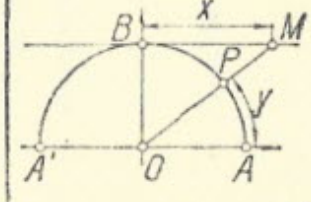
ale funcţiilor trigonometrice

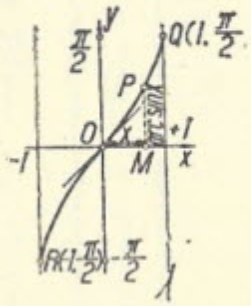
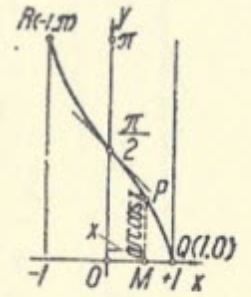
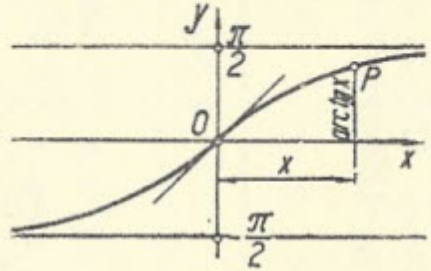
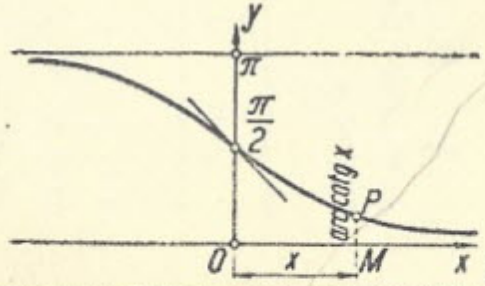
T. 11.

45°	54°	60°	75°	90°	180°	270°
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	1	0	-1
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$	0	-1	0
1	$\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{80}$	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
1	$\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0	$\pm\infty$	0

mai sus sînt restricţiile (§ 7.1.3) funcţiilor care

4. Funcțiile trigonometrice inverse

Funcția	Definiția	Intervalul de definiție	Figura
$y = \arcsin x$	$\sin y = x$	$-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$	 Fig. 14
$y = \arccos x$	$\cos y = x$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	 Fig. 15
$y = \operatorname{arctg} x$	$\operatorname{tg} y = x$	$-\frac{1}{2}\pi \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\pi$	 Fig. 16
$y = \operatorname{arccotg} x$	$\operatorname{coig} y = x$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	 Fig. 17

Relații	Tabelul de variație	Figura
$\sin(\arcsin\ x) = x$ $\arcsin(\sin\ x) = x$	x: -1 $\quad 0$ $\quad +1$ y: $-\frac{1}{2}\pi \nearrow 0 \nearrow \frac{1}{2}\pi$	 Fig. 18
$\cos(\arccos\ x) = x$ $\arccos(\cos\ x) = x$	x: -1 $\quad 0$ $\quad +1$ y: $\pi \searrow \frac{1}{2}\pi \searrow 0$	 Fig. 19
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\ x) = x$ $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\ x) = x$	x: $-\infty$ $\quad 0$ $\quad +\infty$ y: $-\frac{1}{2}\pi \nearrow 0 \nearrow \frac{1}{2}\pi$	 Fig. 20
$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}\ x) = x$ $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}\ x) = x$	x: $-\infty$ $\quad 0$ $\quad +\infty$ y: $\pi \searrow \frac{1}{2}\pi \searrow 0$	 Fig. 21

§ 3.2. Formule și ecuații trigonometrice

1. Relații între funcțiile trigonometrice ale arcelor din diferite cadrane ale cercului trigonometric

T. 13.

$y =$	$-x$	$90° \pm x$	$180° \pm x$	$270° \pm x$	$360° \pm x$
$\sin y =$	$-\sin x$	$\cos x$	$\mp\sin x$	$-\cos x$	$\pm\sin x$
$\cos y =$	$\cos x$	$\mp\sin x$	$-\cos x$	$\pm\sin x$	$\cos x$
$\operatorname{tg} y =$	$-\operatorname{tg} x$	$\mp\operatorname{cotg} x$	$\pm\operatorname{tg} x$	$\mp\operatorname{cotg} x$	$\pm\operatorname{tg} x$
$\operatorname{cotg} y =$	$-\operatorname{cotg} x$	$\mp\operatorname{tg} x$	$\pm\operatorname{cotg} x$	$\mp\operatorname{tg} x$	$\pm\operatorname{cotg} x$

2. Formule fundamentale

(141) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(142) $$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}.$$

(143) $$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

(144) $$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

(145) $$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

(146) $\sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} =$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}.$$

(147) $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} =$

$$= \frac{\operatorname{cotg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 x}}.$$

(148) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} = \dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} =$

$$= \frac{1}{\operatorname{cotg} x}.$$

(149) $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \dfrac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}} =$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

3. Formule de adunare a arcelor şi consecinţe ale lor.

(150) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y.$

(151) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$

(152) $$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

(153) $$\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}.$$

(154) $$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y).$$

(155) $$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y).$$

(156) $$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y).$$

(157) $$\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x \pm y) \cos \frac{1}{2}(x \mp y).$$

(158) $$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y).$$

(159) $$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{1}{2}(y - x) \sin \frac{1}{2}(y + x).$$

(160) $$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}.$$

(161) $$\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}.$$

4. Formule care exprimă funcțiile trigonometrice ale multiplilor arcelor și consecințe ale lor.

(162) $$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

(163) $$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$$
$$= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

(164) $$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

(165) $$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2\operatorname{cotg} x}.$$

(166) $$\sin \frac{1}{2} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}.$$

$$\cos \frac{1}{2} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}.$$

(167) $$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

(168) $$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

(169) $$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x}.$$

(170) $$\operatorname{cotg} 3x = \frac{\operatorname{cotg}^3 x - 3\operatorname{cotg} x}{3\operatorname{cotg}^2 x - 1}.$$

(171)

$$\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots .$$

(172) $$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \dots .$$

(173) $$\operatorname{tg} nx = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} x - C_n^3 \operatorname{tg}^3 x + \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 x + \dots}.$$

(174)

$$\operatorname{cotg} nx = \frac{\operatorname{cotg}^n x - C_n^2 \operatorname{cotg}^{n-2} x + \dots}{C_n^1 \operatorname{cotg}^{n-1} x - C_n^3 \operatorname{cotg}^{n-3} x + \dots}.$$

(175)

$$\sin^{2p} x = \frac{(-1)^p}{2^{p-1}} [\cos 2px - C_{2p}^1 \cos 2(p-1)x + C_{2p}^2 \cos 2(p-2)x - \dots \dots + (-1)^{p-1} C_{2p}^{p-1} \cos 2x] + \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p.$$

(175′)

$$\sin^{2p+1}x = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}[\sin(2p+1)x - C_{2p+1}^1 \sin(2p-$$

$$- 1)\,x + C_{2p+1}^2 \sin(2p-3)x - \ldots +$$

$$+ (-1)^p C_{2p+1}^p \sin x].$$

(176)

$$\cos^{2p}x = \frac{1}{2^{2p-1}}[\cos 2px + C_{2p}^1 \cos 2(p-1)x +$$

$$+ C_{2p}^2 \cos 2(p-2)x + \ldots + C_{2p}^{p-1} \cos 2x] +$$

$$+ \frac{1}{2^{2p}} C_{2p}^p.$$

(176′)

$$\cos^{2p+1} x = \frac{1}{2^{2p}}[\cos(2p+1)x + C_{2p+1}^1 \cos(2p-$$

$$- 1)x + C_{2p+1}^2 \cos(2p-3)x + \ldots + C_{2p+1}^p \cos x].$$

În formulele (171)—(176′) simbolul C_n^m reprezintă numărul combinărilor de n obiecte luate cîte m (§ 2.3.(90)).

Avem de asemenea formulele

(177)

$$\sin a + \sin(a+h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\sin\frac{1}{2}nh \sin\left[a+\frac{1}{2}(n-1)h\right]}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

(178)

$$\cos a + \cos(a+h) + \ldots + \cos[a+(n-1)h] = \frac{\sin\frac{1}{2}nh \cos\left[a+\frac{1}{2}(n-1)h\right]}{\sin\frac{1}{2}h}.$$

5. Relații între funcțiile trigonometrice inverse.

(179) $$\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi.$$

(180) $$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi.$$

(181) $$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right).$$

(182) $\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \dfrac{x \pm y}{1 \mp xy}$.

6. Ecuații trigonometrice simple.

T. 14.

Ecuația	Soluția
a) $\sin x = a (\lvert a \rvert \leqslant 1)$	$\begin{cases} x = 2k\pi + \arcsin a \\ x = (2k+1)\pi - \arcsin a \end{cases}$ sau $x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$
b) $\cos x = a (\lvert a \rvert \leqslant 1)$	$x = 2k\pi \pm \arccos a$
c) $\operatorname{tg} x = a$	$x = k\pi + \operatorname{arctg} a$
d) $\operatorname{cotg} x = a$	$x = k\pi + \operatorname{arccotg} a$

Observație. Cînd cunoaștem pe a, atunci $\arcsin a, \ldots$ $\ldots, \operatorname{arccotg} a$ se calculează cu ajutorul unei tabele de linii trigonometrice naturale (sau cu logaritmi) așa cum s-a explicat la § 7.2.2 folosind metoda interpolării. Se va ține seamă în calcule că $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ sînt crescătoare, în timp ce $\cos x$ și $\operatorname{cotg} x$ sînt descrescătoare în primul cadran al cercului trigonometric.

7. a) Ecuația

(183) $a \sin x + b \cos x = c \qquad (a, b, c \in R)$

prin substituția $b = a \operatorname{tg} \alpha$ se reduce la ecuația

(183′) $$\sin(x + \alpha) = (c/a) \cos \alpha,$$

care este de tipul a) din T. 14. Pentru a avea soluții este necesar ca $|c \cos \alpha| \leqslant |a|$.

b) Ecuații de forma

(184) $$\sum_{h=0}^{n} a_h \sin^h x \cos^{n-h} x = 0$$

(omogene în sin x și cos x), se reduc la ecuații algebrice prin substituția $\operatorname{tg} x = u$.

§ 3.3. Rezolvarea triunghiurilor

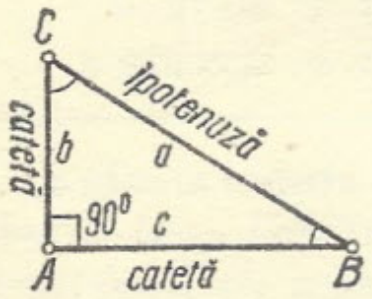


Fig. 22

1. Triunghiuri dreptunghice (§ 4.4.6 I). *Notații* (fig. 22): laturile se numesc $a = BC$ *ipotenuză* (opusă unghiului drept $A = 90°$); $b = CA$, $c = AB$ *catete*.

Formule:

(185) $B + C = 90°$.

(186) $b = a \sin B = a \cos C$; $c = a \sin C = a \cos B$.

(187) $b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C$; $c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B$.

(188) $$\operatorname{cotg} \frac{B}{2} = (a + c)/b.$$

Cazul	Date	Necunoscute	Formule folosite	Condiții
I	a, B	b, c, C	$b = a \sin B$ $c = a \cos B$ $C = 90° - B$	$B < 90°$
II	a, b	c, B, C	$c = \sqrt{(a-b)(a+b)}$ $\sin B = b/a$ $C = 90° - B$	$a > b$
III	b, C	a, c, B	$a = b/\cos C$ $c = b \operatorname{tg} C$ $B = 90° - C$	$C < 90°$
IV	b, c	a, B, C	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $\operatorname{tg} B = b/c$ $C = 90° - B$	nu sînt

2. Triunghiuri oarecare (§ 4.4.1). *Notații* (fig. 23): laturile $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; perimetrul $2p = a + b + c$; raza cercului circumscris $OA = OB = OC = R$; raza cercului înscris $IE = IF = IK = r$; razele cercurilor exîn-

scrise $I_aE' = I_aF' = I_aK' = r_a$, r_b, r_c; înălțimile $AD = h_a$, h_b, h_c; aria S; medianele $AA' = m_a$, m_b, m_c; bisectoarele interioare $AJ = l_a$,

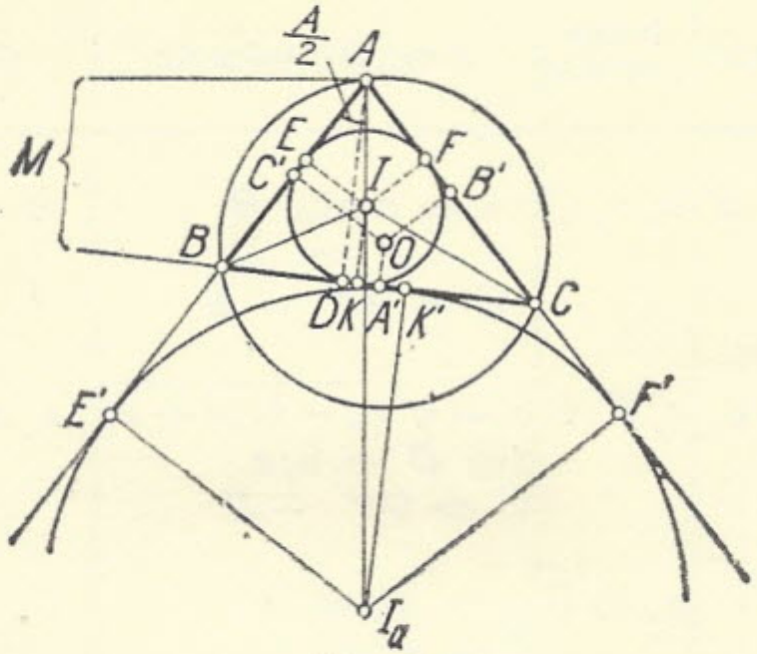


Fig. 23

l_b, l_c; bisectoarele exterioare $AM = l'_a$, l'_b, l'_c.
Formule:

(189) $A + B + C = 180°.$

(190) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

(191) $a = b \cos C + c \cos B, \ldots$

(192) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \ldots$

(193) $$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2},\ \ldots$$

(194) $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \ldots$$

(195) $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\ \ldots$$

(196) $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a),}},\ \ldots$$

(197) $$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$

$$=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{S}{p}=$$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

(198) $$r=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=$$

$$=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{S}{p-a}=$$

$$=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},\ \ldots$$

(199) $$p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

(200) $$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

(201) $$l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{2R \sin B \sin C}{\cos \frac{1}{2}(B-C)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}, \ \ldots$$

(202) $$l_a = \frac{2bc}{b-c} \sin \frac{A}{2} = \frac{2R \sin B \sin C}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{b-c}, \ \ldots$$

(203) $$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, \ \ldots$$

(204) $$S = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(205) $$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Cazul	Date	Necunoscute	Formule folosite	Condiții
I	a, B, C	$A,\ b,\ c,\ S$	$A = 180° - (B + C)$ $b = \dfrac{a \sin B}{\sin(B + C)}$ $c = \dfrac{a \sin C}{\sin(B + C)}$ $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin(B + C)}$	$B + C < 180°$
II	b, c, A	$a,\ B,\ C,\ S$	$B + C = 180° - A$ $\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}(B-C) = \dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}$ $a = b \sin A / \sin B$ $S = \dfrac{1}{2} b\, c \sin A$	nu sînt

T. 16 (continuare)

Cazul	Date	Necunoscute	Formule folosite	Condiții
III	a, b, c	A, B, C, S	$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ și analog pentru calculul lui B, C $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	$a<b+c$ și analogele ei
IV	a, b, A	c, B, C, S	$\sin B = b \sin A/a$ $C = 180^\circ - (A+B)$ $c = a \sin C/\sin A$	1) $b \sin A<a$; prima relație dă două valori: B și $180^\circ - B$. Atunci: a) $A<90^\circ$ avem două soluții cînd $b>a$ și o singură soluție cînd $b\leqslant a$. b) $A>90^\circ$ avem o soluție dacă $b<a$. c) $A=90^\circ$ sîntem în cazul II de la triunghiurile dreptunghice. 2) $b \sin A = a$, $B = 90^\circ$ avem o soluție cînd $b>a$.

3. Formule referitoare la proiecții.

a) Proiecția unui vector pe o axă Δ este un segment orientat a cărui mărime este dată de formula (fig. 24)

(206) $$\boxed{\overline{A'B'} = |\overline{AB}| \cos\varphi.}$$

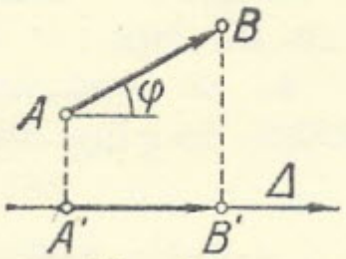


Fig. 24

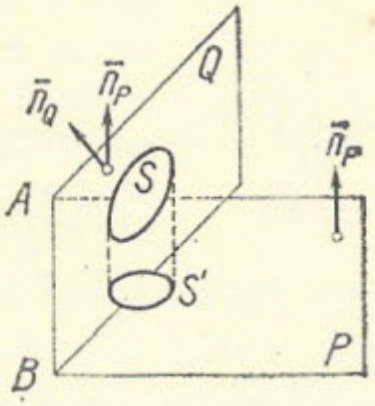


Fig. 25

b) Proiecția unei arii plane orientată prin versorul normal planului $\bar{n}_Q$ (§ 6.1.1), pe un plan orientat prin versorul normal $\bar{n}_P$ este dat de formula (fig. 25)

(207) $$\boxed{\bar{S}' = |\bar{S}| \cos(\bar{n}_Q, \bar{n}_P).}$$

§ 3.4. Numere complexe

1. Prin definiție un număr complex c este o pereche ordonată de numere (a, b) $(a, b \in R)$; adunarea și înmulțirea a două numere complexe

$c_1 \leftrightarrow (a_1, b_1)$, $c_2 \leftrightarrow (a_2, b_2)$ se definesc prin $c_1 + c_2 \leftrightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $c_1 c_2 \leftrightarrow (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Un număr complex de forma $(a, 0)$ reprezintă numărul real a. Dacă se definește *unitatea imaginară* $i \leftrightarrow (0, 1)$, atunci $i^2 = -1$ și orice număr complex se va putea scrie sub forma $c = a + bi$. Un număr complex de forma bi se numește *pur imaginar*. Două numere complexe de tipul $c = a + bi$, $\bar{c} = a - bi$ se numesc *complexe conjugate*. Dacă reprezentăm în plan numărul complex c prin coordonatele (a, b) (fig. 26), $\bar{c}$ va fi simetricul lui față de Ox (§ 5.5.1). Vom introduce notațiile $a = \overline{OA} = \mathrm{Re}(c)$, $b = \overline{OB} = \mathrm{Im}(c)$,

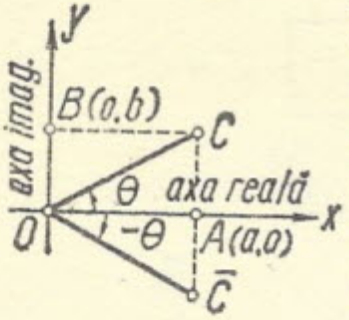


Fig. 26

$OC = \rho =$ modulul lui $c = |c|$, $\widehat{AOC} = \theta =$ argumentul lui $c = \arg c$. $-c$ opusul lui c. Avem

$$(208)\quad a = \rho\cos\theta;\quad b = \rho\sin\theta;\quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\theta = 2k\pi + \begin{cases} \mathrm{arctg}(b/a) & \text{dacă } \mathrm{Re}(c) > 0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{dacă } \mathrm{Re}(c) = 0,\ \mathrm{Im}(c) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{dacă } \mathrm{Re}(c) = 0,\ \mathrm{Im}(c) < 0, \\ \pi + \mathrm{arctg}(b/a) & \text{dacă } \mathrm{Re}(c) < 0, \end{cases}$$

unde $k \in Z$. Avem

(209) $$\boxed{c = a + bi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).}$$

Prima expresie se numește *forma algebrică* iar a doua, *forma trigonometrică* a numărului complex.

2. Proprietăți.

a) Dacă punem $c_h = a_h + ib_h = \rho_h(\cos\theta_h + i\sin\theta_h)$, atunci:

(210) $c = 0$ dacă și numai dacă $\mathrm{Re}(c) = \mathrm{Im}(c) = 0$ sau $|c| = 0$.

(211) $c_1 = c_2$ dacă și numai dacă $\mathrm{Re}(c_1) = \mathrm{Re}(c_2)$ și $\mathrm{Im}(c_1) = \mathrm{Im}(c_2)$.
sau
$|c_1| = |c_2|$ și $\arg c_1 = \arg c_2 + 2k\pi (k \in Z)$.

(212) $$\mathrm{Re}(c) = \frac{1}{2}(c + \bar{c}), \quad \mathrm{Im}(c) = \frac{1}{2i}(c - \bar{c}).$$

(213) $$|\bar{c}| = |c|, \quad \arg c = -\arg \bar{c}.$$

(214) $$c_1 \pm c_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2).$$

(215) $$c_1c_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

(216) $$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

(217) $$\overline{c_1 + c_2} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2.$$

(218) $\overline{c_1 c_2} = \bar{c}_1 \bar{c}_2$.

(219) $\overline{(c_1/c_2)} = \bar{c}_1/\bar{c}_2 \ (c_2 \neq 0)$; $\bar{\bar{c}} = c$.

(219′) $c + \bar{c} = 2a$ (real), $c\bar{c} = a^2 + b^2$ (real)

(220) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$; $i^{4m} = 1$,
$i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -i$ $(m \in N)$.

(221) $c^m = \rho^m(\cos m\theta + i \sin m\theta)$. $(m \in Z)$

b) Geometric (fig. 27), numărul complex $c_1 + c_2$ este al patrulea vîrf S al paralelogramului construit pe $OM_1 = |c_1|$, $OM_2 = |c_2|$ ca laturi; de asemenea $c_1 - c_2$ este al patrulea vîrf al paralelogramului construit pe OM_1 și OM_2' ca laturi ($-c_2$ este simetricul lui c_2 față de O). Avem

(222) $|c_1 + c_2| = OS$, $|c_1 - c_2| = OD = M_2M_1$.

c) Geometric, suma mai multor numere complexe (fig. 28) se face din aproape în aproape.

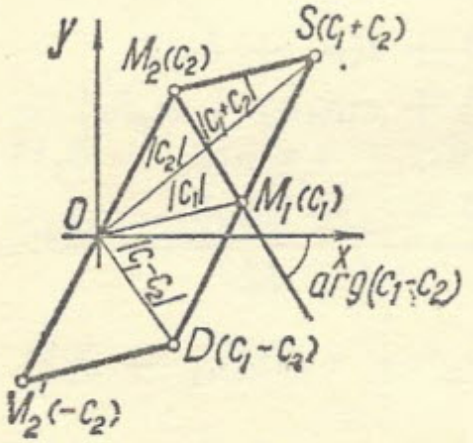


Fig. 27

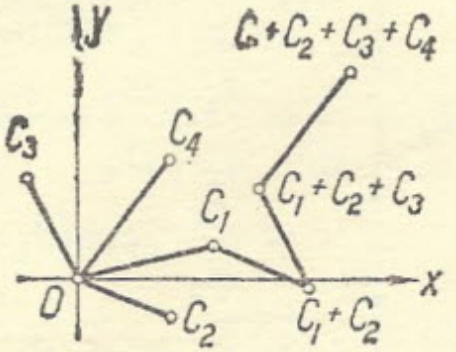


Fig. 28

Pentru aceasta se consideră vectorii care unesc originea cu fiecare punct c_k și se așază acești vectori cap la cap astfel ca extremitatea fiecăruia să coincidă cu originea următorului; ultima extremitate va reprezenta suma căutată.

d) Formulele (216)—(218) date la § 1.2.4 valabile pentru valorile absolute ale numerelor reale, sînt valabile și pentru modulele numerelor complexe.

e) *Formula lui Moivre*

$$(223)\qquad \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \quad (m \in Z).}$$

f) Mulțimea numerelor complexe C formează un corp comutativ (cîmp) față de operațiile de adunare și înmulțire definite la § 3.4.1.

3. a) Rădăcina pătrată dintr-un număr complex are două valori egale și opuse. Dacă numărul complex este scris sub forma algebrică, atunci

$$(a+bi)^{\frac{1}{2}} = \pm\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)} + i\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right]$$

unde ε este semnul lui b.

b) *Rădăcina de ord. n dintr-un număr complex* are n valori; dacă numărul este scris sub formă trigonometrică, atunci

(224) $$c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1;\ n \in N).$$

Din (221) şi (224) rezultă

$$|c^p| = |c|^p \qquad (p \in Q).$$

În reprezentarea plană numerele complexe (224) se găsesc pe un cerc cu centrul în origine de rază $\sqrt[n]{\rho}$ (rădăcina aritmetică a lui ρ, § 1.4) formînd vîrfurile poligonului regulat cu n laturi înscris; primul vîrf are argumentul θ/n (fig. 29).

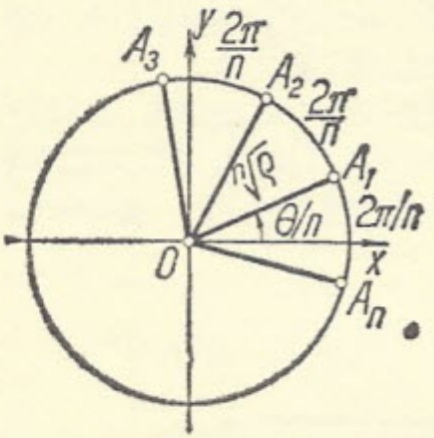


Fig. 29

c) În particular rădăcinile de ord. n ale unităţii sînt

$$1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}, \text{ unde}$$
$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

d) O *ecuaţie binomă* este o ecuaţie de forma

(225) $x^n - c = 0,\ (n \in N),$

unde c este un număr complex. O asemenea ecuaţie are n rădăcini date de formula (223). Cu ajutorul ecuaţiilor binome, prin metoda dată la § 2.4.4, se pot rezolva ecuaţii de forma

(226) $ax^{2n} + bx^n + c = 0.$

4. GEOMETRIA EUCLIDIANĂ A PLANULUI

§ 4.1. Unghiuri. Drepte paralele

1. Punct. Dreaptă. Figura geometrică care nu are nici o dimensiune se numește *punct*. Un punct definește o *poziție* pe o dreaptă, într-un plan sau în spațiu. Linia dreaptă, sau mai simplu, *dreapta*, este figura geometrică reprezentată printr-un fir întins care nu are grosime. Printr-un punct trec o infinitate de drepte care se zice că formează un *fascicul* (fig. 30). O *dreaptă orientată* este o dreaptă pe care s-a ales un sens de parcurgere. Un punct pe o dreaptă, o împarte în două *semidrepte* AB, AB' (fig. 31). Două drepte care se întîlnesc în plan se taie într-un punct.

Prin două puncte trece o dreaptă și numai una. Porțiunea dintr-o dreaptă mărginită de două puncte A, B se

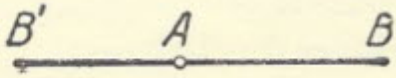


Fig. 31

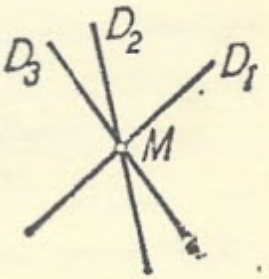


Fig. 30

numește *segment*, iar A, B *extremitățile* segmentului (fig. 32). Un segment are o *lungime*. Dacă segmentul este orientat (segment algebric) de la A spre B, A se numește *originea* iar B *extremitatea* segmentului și se notează cu $\overline{AB}$. Două segmente *egale* (care se pot suprapune) au aceeași lungime.

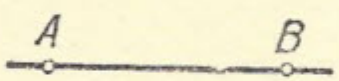


Fig. 32

2. Două semidrepte D_1, D_2 care se întîlnesc într-un punct O, definesc un *unghi* $\widehat{AOB} = (\widehat{D_1, D_2})$ (fig. 33); O se numește *vîrful* unghiului, iar D_1, D_2 *laturile* lui. Un unghi care are laturile confundate se numește *unghi nul*. Două unghiuri care într-un mod oarecare sînt aduse să se suprapună (în sensul ca să aibă același vîrf și laturile confundate) se zice că sînt *egale*. Dacă din vîrful unghiului ca centru descriem un arc de cerc, măsura acestui arc în grade sau în radiani (§ 3.1.1) este independentă de raza cercului. Acest *invariant* se numește *măsura* unghiului. Două unghiuri egale au aceeași măsură.

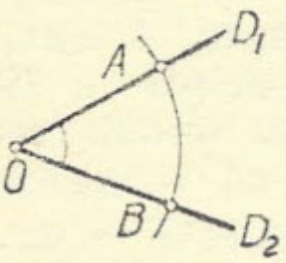


Fig. 33

3. Noțiunea de unghi geometric dată mai sus, se poate extinde la noțiunea de *unghi algebric* (adică *orientat*) considerînd laturile unghiului într-o ordine determinată. Vom avea relațiile;

(227) $(\widehat{D_1, D_2}) = -(\widehat{D_2, D_1})$ sau mai general

$$(\widehat{D_1, D_2}) = -(\widehat{D_2, D_1}) + 360°k.$$

(228) $(\widehat{D_1, D_2}) + (\widehat{D_2, D_3}) + \ldots + (\widehat{D_{n-1}, D_n}) +$

$$+ (\widehat{D_n, D_1}) = 360°k \quad (k \in Z),$$

D_k fiind semidrepte ce pleacă din același punct (fig. 34). Dacă dreptele se succed în ordinea naturală a indicilor și unghiurile sînt definite prin valoarea geometrică, atunci trebuie să luăm în (228), $k = 1$.

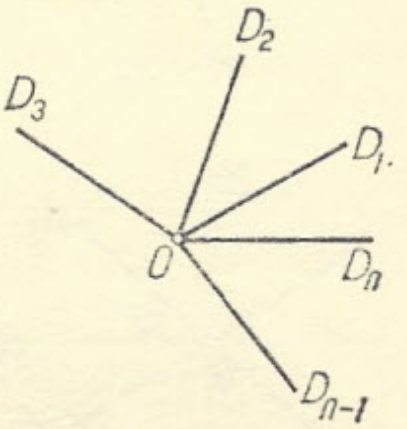


Fig. 34

4. Un unghi de 90° $\left(\text{în radiani } \frac{\pi}{2}\right)$ se numește *unghi drept* și laturile se zic că sînt *perpendiculare* (fig. 35). Orice punct M de pe una din laturi se zice că se proiectează în O pe cealaltă latură, sau că O este proiecția lui M pe OA. Două unghiuri $\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$ a căror sumă este 90° se numesc *complementare*. Un unghi de 180° are laturile în prelungire

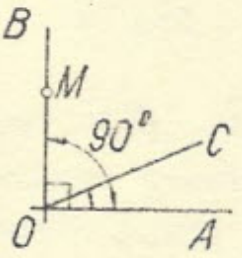


Fig. 35

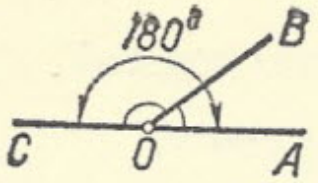


Fig. 36

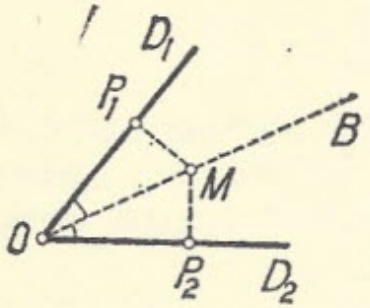


Fig. 37

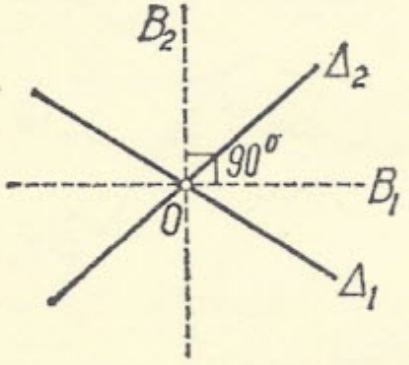


Fig. 38

(fig. 36); două unghiuri $\widehat{AOB}$, $\widehat{COB}$ care au ca sumă 180° se numesc *suplementare*; invers, două unghiuri suplementare care au același vîrf, o latură comună, situate de-o parte și de cealaltă a acesteia (unghiuri *adiacente*) au celelalte două laturi în prelungire.

5. Semidreapta OB care împarte un unghi în două părți egale (fig. 37) se numește *bisectoare*. Orice punct de pe bisectoare este egal depărtat de laturi. Două drepte Δ_1, Δ_2 care se taie în O (fig. 38) formează patru unghiuri opuse la vîrf două cîte două egale între ele. Bisectoarele unghiurilor opuse la vîrf sînt în prelungire iar bisectoarele unghiurilor suplementare, perpendiculare între ele. Pentru unghiul $\widehat{\Delta_1 O \Delta_2}$, OB_1 este *bisectoare interioară*, iar OB_2, *bisectoare exterioară*.

6. Două drepte *coplanare* Δ_1, Δ_2 (care sînt în același plan) sînt *paralele* dacă nu au nici un

punct comun la distanță finită (fig. 39). Două drepte sînt paralele dacă și numai dacă formează cu o *secantă* arbitrară Δ, unghiuri *alterne interne* egale (de ex., $\alpha = \beta$). Toate unghiurile ascuțite (respectiv obtuze) formate de secantă sînt egale; două unghiuri din categorii diferite sînt suplementare. Dacă secanta este perpendiculară pe una din drepte este perpendiculară și pe cealaltă și formează cu ele unghiuri drepte.

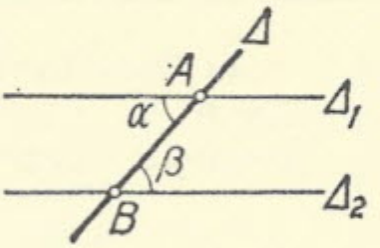


Fig. 39

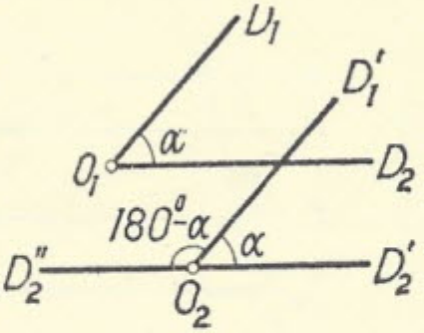


Fig. 40

Două unghiuri care au laturile paralele (fig. 40), sau perpendiculare (fig. 41), sînt egale sau suplementare după cum ambele laturi sau numai două din ele au același sens (sau sensuri opuse).

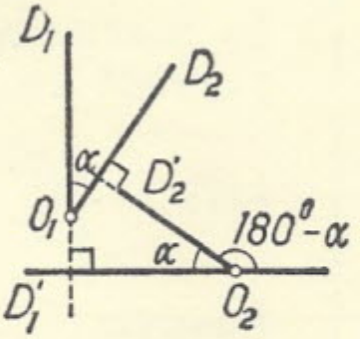


Fig. 41

Printr-o convenție de exprimare, putem spune că două drepte paralele fac între ele un unghi de 0° sau 180°.

7. Mai multe drepte sînt paralele (fig. 42) dacă și numai dacă, determină pe două secante arbitrare segmente proporționale

$$(229)\quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AD}{A'D'} = \dots$$

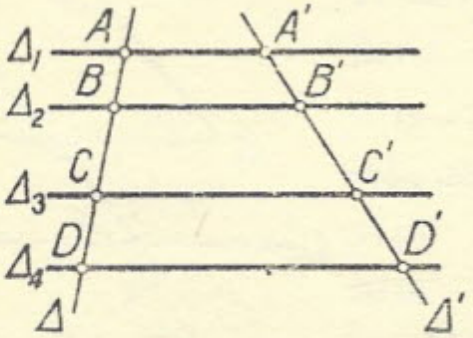


Fig. 42

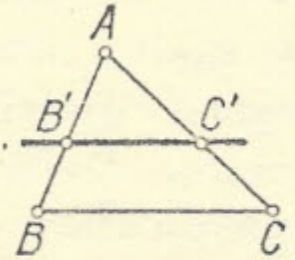


Fig. 43

În particular (fig. 43), o dreaptă $B'C'$ este paralelă cu BC dacă și numai dacă

$$(229')\quad \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}$$ (teorema lui *Thales*).

Consecință. $B'C'$ este paralelă cu BC atunci și numai atunci cînd

$$(230)\quad \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

§ 4.2. Cercul

1. Cercul este o curbă formată de toate punctele din plan egal depărtate de un punct fix O numit *centru* cu distanţa R numită *rază*. Dacă alegem un sens de parcurgere, de ex., cel trigonometric (§ 3.1.1), vom spune că cercul este *orientat*. Figura cea mai simplă construită pe cerc este *arcul* care este o porţiune de cerc mărginită de două puncte M, N *extremităţile* arcului (fig. 44)

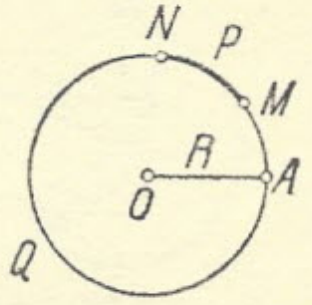


Fig. 44

notat cu $\overset{\frown}{MN}$. În fond două puncte M, N pe un cerc, determină două arce $\overset{\frown}{MPN}$ şi $\overset{\frown}{MQN}$ a căror sumă este un cerc; cînd se pot produce confuzii, va trebui să precizăm de care din arce vorbim. Măsura unui arc se face în *grade* (sau în *radiani*, loc. cit.). Un *grad* 1°, este a 360-a parte dintr-un cerc, un *minut* 1′ este a şaizecea parte dintr-un grad, iar o *secundă* 1″ este a şaizecea parte dintr-un minut. Acest sistem se numeşte *sexazecimal;* dacă se ia pentru grad a 400-a parte din cerc, pentru minut a 100-a parte dintr-un grad, iar pentru secundă a 100-a parte dintr-un minut, sistemul se numeşte *centesimal*.

Dacă se iau pe un cerc orientat n puncte A_k aşezate într-o ordine oarecare, atunci

$$(231)\quad \overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + \ldots + \overset{\frown}{A_{n-1}A_n} + \overset{\frown}{A_nA_1} = 360°k \qquad (k \in Z).$$

Dacă luăm pentru arce mărimea geometrică, atunci $k = 1$.

2. Considerăm acum cercul în plan.

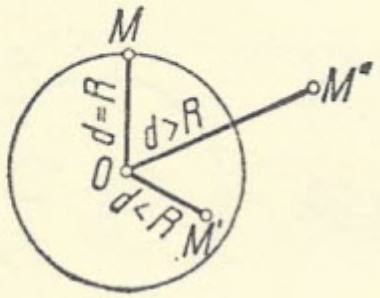


Fig. 45

Punctele din plan se împart în trei categorii faţă de cerc (fig. 45) după cum ($OM = d$) $d<R$, puncte *interioare*, $d>R$ puncte *exterioare* sau $d = R$ puncte pe *cerc*; pentru acest motiv, se zice că cercul este o *curbă plană închisă*.

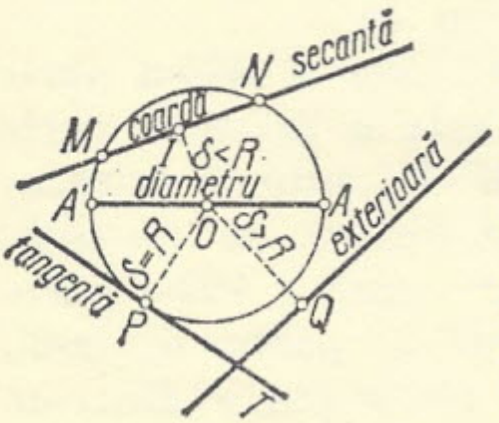


Fig. 46

Dreptele din plan se împart, faţă de cerc, de asemenea în trei categorii (fig. 46) (δ distanţa de la 0 la dreaptă): $\delta<R$ *secantă*, porţiunea $MN \leqslant 2R$ se numeşte *coardă*, care în cazul în care secanta trece prin O, $MN = AA' = 2R$ şi se

numește *diametru*; $\delta > R$, *exterioară*); $\delta = R$, *tangentă* (§ 7.6.2). Din punct de vedere algebric, spunem că o secantă taie cercul în *două puncte reale*, o dreaptă exterioară în *două puncte imaginare conjugate*, iar o tangentă în *două puncte reale confundate*.

Dintr-un punct exterior M (fig. 47) se pot duce la un cerc două tangente egale $MP = MQ$; dreapta OM care unește pe M cu centrul cercului împarte unghiul tangentelor în două părți egale și este perpendiculară pe PQ, dreapta ce unește punctele de tangență.

Un diametru este *axă de simetrie* (§ 5.5.1) pentru cerc.

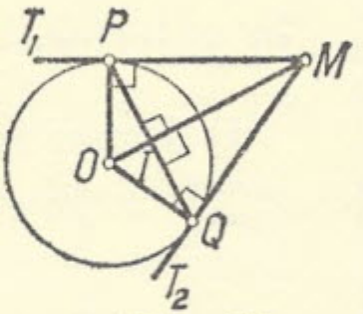


Fig. 47

3. Măsura unghiurilor în cerc (fig. 48).

a) *Unghi la centru*, unghiul care are vîrful în centrul cercului, $\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$.

b) *Unghi înscris*, adică unghiul care are vîrful pe cerc, $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$.

c) *Unghi format de o coardă și tangenta într-o extremitate*

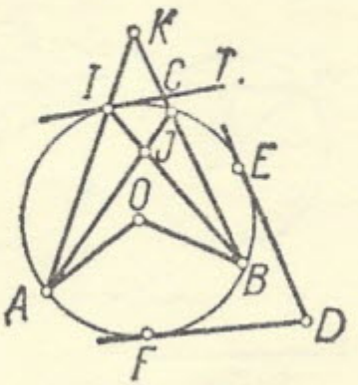


Fig. 48

(caz limită al precedentului), $\widehat{AIT} = \frac{1}{2}\widehat{ABI}$.

d) *Unghi interior*, unghiul care are vîrful în interior, $\widehat{AJB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{IC})$.

e) *Unghi exterior*, unghiul care are vîrful în exterior, $\widehat{AKB} = \frac{1}{2}(\widehat{AB} - \widehat{IC})$.

f) *Unghi cu vîrful în exterior și avînd laturile tangente la cerc* (caz limită al precedentului), $\widehat{EDF} = \frac{1}{2}(\widehat{EAF} - \widehat{EBF})$.*

4. Două cercuri sînt egale cînd au razele egale. Într-un cerc, sau în două cercuri egale, avem proprietățile (fig. 49):

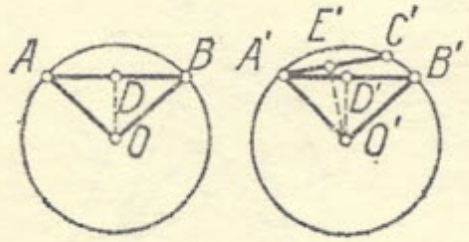


Fig. 49

a) Egalitățile $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$, $AB = A'B'$, $OD = O'D'$, $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ sînt echivalente.

*) Egalitățile din acest paragraf exprimă faptul că unghiurile și arcele care le compun, au cceeași măsură.

b) Inegalitățile $\widehat{AB} > \widehat{A'C'}$, $AB > A'C'$, $\widehat{AOB} > \widehat{A'O'C'}$ sînt echivalente.

c) $AB > A'C'$ dacă și numai dacă $OD < O'E'$.

5. Pozițiile relative a două cercuri.

a) *Secante* (fig. 50) cînd se taie în două puncte. Distanța centrelor $OO' = d$ este față de raze, $R - R' < d < R + R'$ $(R' < R)$. Punctele de

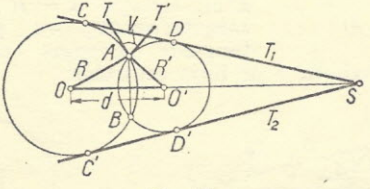


Fig. 50

intersecție A, B sînt simetrice față de *linia centrelor* OO'; dreapta AB se numește *coarda comună*. Au două *tangente comune exterioare* care se întîlnesc într-un punct S pe linia centrelor. Unghiul V al tangentelor celor două *cercuri într-unul din punctele de intersecție*, se numește *unghiul celor două cercuri*; dacă $V = 90°$ se zice că cercurile sînt *ortogonale* și triunghiul OAO' este dreptunghic.

b) *Tangente interioare* (fig. 51) cînd se taie într-un singur punct (două puncte confundate) ambele cercuri avînd în acest punct o tangentă unică și fiind ambele situate de aceeași parte a ei. Relația $d = R - R'$ le caracterizează.

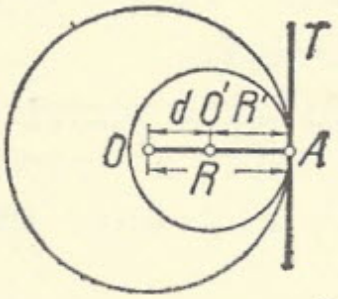


Fig. 51

c) *Tangente exterioare* (fig. 52) cînd se taie într-un punct în care au aceeași tangentă, cercurile fiind de-o parte și de alta a ei. Relația $d = R + R'$ le caracterizează; au și două tangente comune exterioare care se taie în S pe linia centrelor.

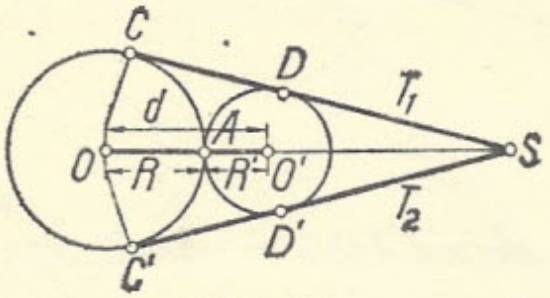


Fig. 52

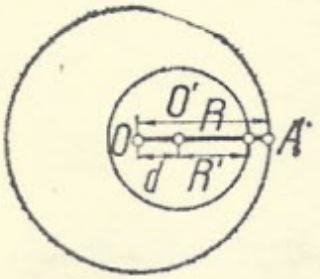


Fig. 53

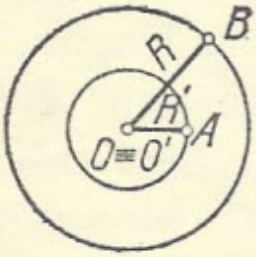


Fig. 54

d) *Interioare* (fig. 53) cînd toate punctele unuia sînt interioare celuilalt. Relația $d < R - R'$ le caracterizează. Dacă $d = 0$ (fig. 54). cercurile se numesc *concentrice*. Nu au tangente comune.

e) *Exterioare* (fig. 55) cînd punctele fiec rui cerc sînt exterioare celuilalt. Relaţia $d > R + R'$ le caracterizează. Au două tangente exterioare

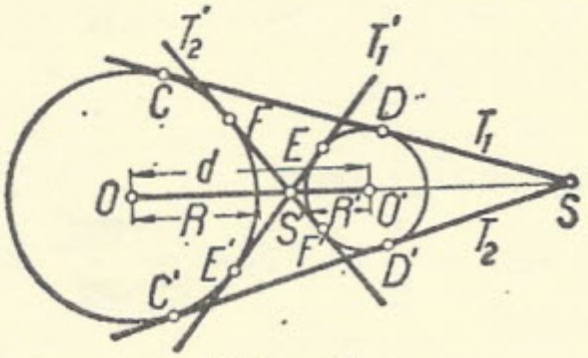


Fig. 55

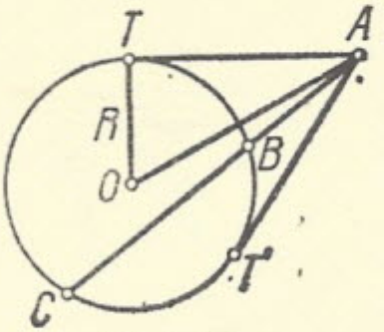


Fig. 56

T_1, T_2 şi două tangente interioare T_1, T_2' (§ 4.7.16) care se întîlnesc respectiv în două puncte S şi S' situate pe linia centrelor ; S se numeşte *centrul de omotetie direct* iar S' *centrul de omotetie invers* al celor două cercuri.

6. Putere. Se numeşte puterea p_A a unui punct A faţă de un cerc de rază R (fig. 56) expresia

(232) $p_A = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AT^2 = AT'^2 = OA^2 - R^2,$

care este independentă de poziţia secantei ABC. Dacă A este exterior $p_A > 0$, dacă A este interior $p_A < 0$, iar dacă A este pe cerc $p_A = 0$ (§ 4.3.2 e).

7. Formule. Lungimea cercului de rază R este

(233) $l = 2\pi R.$

şi aria

(234) $S = \pi R^2.$

Lungimea unui arc AB (fig. 57) are ca expresie

(235) $l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = Rn^r$, unde n° este măsura arcului în grade iar n^r în radiani.

Lungimea coardei este $l_{AB} = 2R \sin \dfrac{1}{2} \widehat{AOB}$.

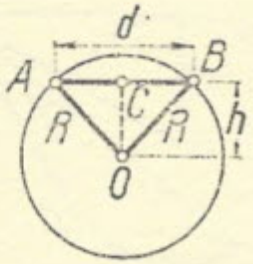


Fig. 57

Aria sectorului este

(236) $S_{AOBC} = \dfrac{1}{2} l_{\widehat{AB}} R = \dfrac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} = \dfrac{1}{2} R^2 n^r$.

Aria segmentului circular ABC este

(237) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} (l_{\overset{\frown}{AB}} R - hd)$.

§ 4.3. Locuri geometrice

1. Se numește *loc geometric* (sau mai simplu *loc*), figura formată de mulțimea tuturor punctelor din plan (sau din spațiu) care se bucură de o aceeași proprietate. Locurile geometrice se definesc:

a) Printr-o relație metrică care caracterizează toate punctele locului.

b) Prin intersecția a două familii de curbe (sau de suprafețe în spațiu) care depind de un parametru și ale căror puncte comune aparțin locului.

2. Exemple de locuri geometrice.

a) Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix este un cerc.

b) Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două drepte concurente sînt bisectoarele unghiurilor formate de aceste drepte (fig. 58).

c) Locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de două puncte fixe A, B este perpendiculara ridicată pe mijlocul segmentului AB, care se numeşte *mediatoarea* segmentului AB (fig. 59).

d) Locul geometric al punctelor din plan din care se vede un segment dat, sub un unghi

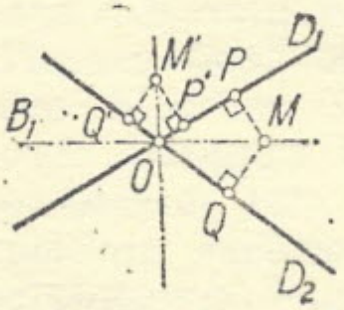


Fig. 58

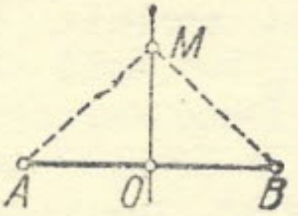


Fig. 59

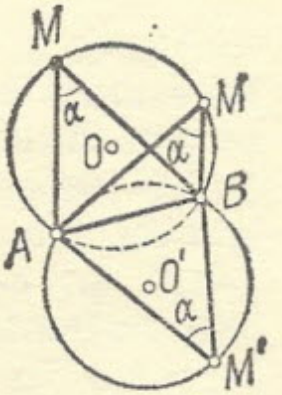


Fig. 60

$\overset{\frown}{AMB} = \alpha$ (fig. 60) este format din două arce AMB, $AM'B$ (simetrice faţă de AB); arcul AMB se numeşte *arc capabil de unghiul* α.

e) Locul geometric al punctelor din plan care au puteri egale față de două cercuri date O, O' (fig. 61) este o dreaptă D perpendiculară pe linia

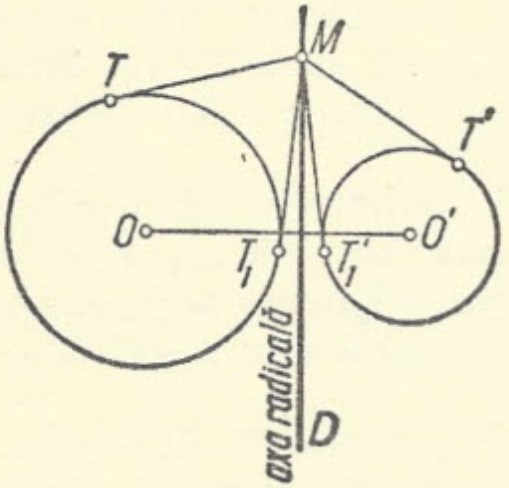


Fig. 61

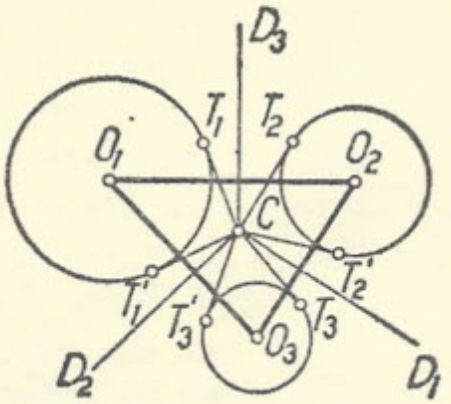


Fig. 62

centrelor și care se numește *axă radicală*. Ea este în același timp locul punctelor din plan din care se pot duce tangente egale la cele două cercuri. Dacă cercurile sînt secante, axa radicală este coarda lor comună, iar dacă sînt tangente, tangenta lor comună. Dacă cercurile sînt interioare, axa radicală va fi o dreaptă exterioară ambelor cercuri; în particular, două cercuri concentrice nu au axă radicală (se poate spune, prin convenție, că axa radicală este situată la infinit).

Fiind date trei cercuri (fig. 62) există un punct C în planul lor, numit *centrul radical*, care are puteri egale față de cele trei cercuri; din C se pot

duce tangente egale la cele trei cercuri. Centrul radical este intersecția axelor radicale ale celor trei cercuri luate două cîte două.

.4 Triunghiuri

1. Triunghiuri oarecare. Trei puncte care sînt pe o dreaptă, se numesc *coliniare*. Figura formată prin unirea a trei puncte care nu sînt coliniare se numește *triunghi* (fig. 63).

Pe lîngă laturile a, b, c și unghiurile triunghiului A, B, C se mai consideră uneori și *unghiurile exterioare* a căror măsură este $180°-A$, $180°-B$, $180°-C$. Între laturile unui triunghi $(a > b > c)$ avem dubla inegalitate

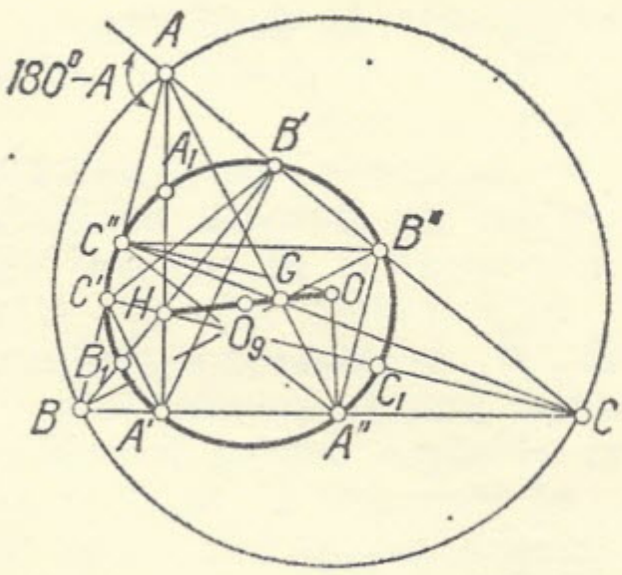


Fig. 63

(238) $b-c<a<b+c$.

Invers, cu trei segmente care satisfac acestei duble inegalități, se poate construi un triunghi.

Avem următoarele proprietăți:

a) Perpendicularele coborîte din vîrfuri pe laturile opuse, AA', BB', CC' se numesc *înălțimile* triunghiului și sînt concurente într-un punct H numit *ortocentrul* triunghiului. Triunghiul $A'B'C'$ se numește *triunghi ortic* și înălțimile AA', BB', CC' sînt bisectoarele lui interioare.

b) Dreptele AA'', BB'', CC'' care unesc vîrfurile cu mijloacele laturilor opuse, se numesc *mediane* și sînt concurente într-un punct G care este *centrul de greutate* al triunghiului considerat construit dintr-un material omogen. Punctul G se găsește la două treimi de la vîrf, din fiecare mediană. Triunghiul $A''B''C''$ se numește *triunghi median*.

c) Dreptele perpendiculare pe mijloacele laturilor se numesc *mediatoare* și sînt concurente în *centrul O al cercului* circumscris triunghiului.

d) Punctele A', B', C'; A'', B'', C'' și A_1, B_1, C_1 mijloacele segmentelor AH, BH, CH, sînt *nouă* puncte pe un cerc, numit *cercul lui Euler* și al cărui centru îl notăm cu O_9.

e) Punctele H, O, G, O_9 sînt pe o dreaptă numită *dreapta lui Euler*; avem $GH = 2\,GO$.

f) Unghiurile triunghiului au șase *bisectoare*, trei *interioare* și trei *exterioare* (fig. 64). Cele interioare sînt concurente într-un punct I, care este *centrul cercului înscris;* două bisectoare exterioare sînt concurente cu cîte o bisectoare interioară în

trei puncte I_a, I_b, I_c, care sînt centrele a trei cercuri *exînscrise* triunghiului. Cele patru cercuri astfel construite reprezintă cercurile tangente la trei drepte neconcurente, laturile triunghiului.

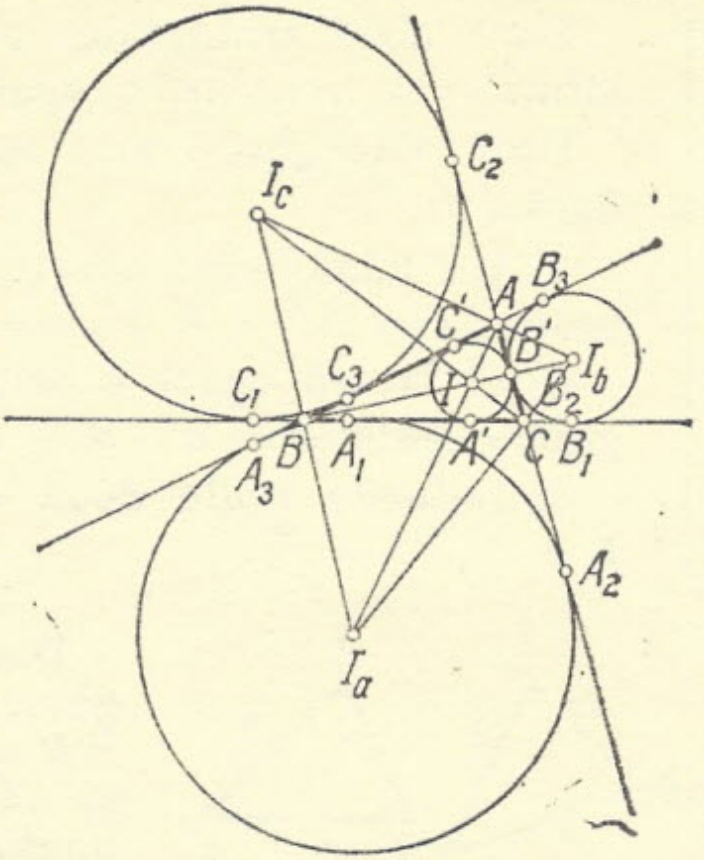


Fig. 64

2. Se zice că două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ (fig. 65) sînt *egale* cînd se pot suprapune. Dacă suprapunerea se poate face mișcînd unul din triunghiuri fără a-l scoate din plan, se zice că triunghiurile sînt *direct egale;* în caz contrar se zice că sînt *invers egale* (în figură triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt direct egale în timp ce triunghiurile ABC, $A''B''C''$ sînt invers egale).

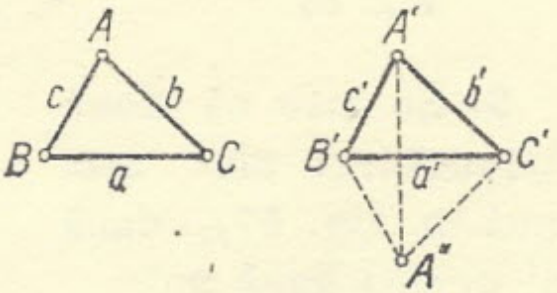


Fig. 65

Dacă două triunghiuri sînt egale, au toate laturile și unghiurile egale.

Două triunghiuri sînt egale dacă și numai dacă au:

a) Un unghi egal cuprins între două laturi egale ($A = A'$, $b = b'$, $c = c'$);

b) O latură egală cuprinsă între două unghiuri egale ($a = a'$, $B = B'$, $C = C'$);

c) Laturile egale două cîte două ($a = a'$, $b = b'$, $c = c'$).

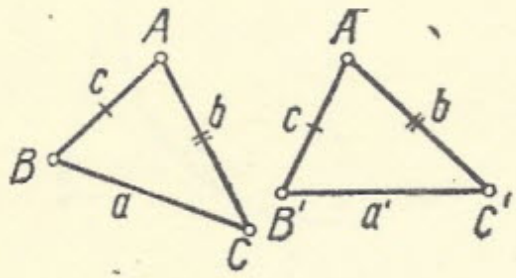


Fig. 66

Dacă în două triunghiuri (fig. 66) avem $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ și $A \neq A'$, atunci la unghiul mai mic se opune latura mai mică ($BC < B'C'$) și reciproc.

3. Se zice că două triunghiuri sînt asemenea (fig. 67), dacă și numai dacă au:

a) Două unghiuri egale două cîte două ($B = B'$, $C = C'$);

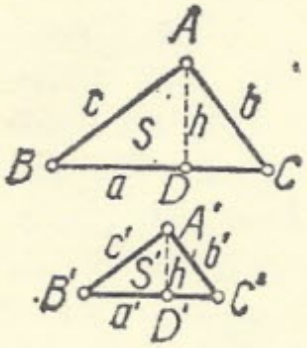


Fig. 67

b) Un unghi egal cuprins între două laturi proporționale ($A = A'$, $b/b' = c/c'$);

c) Laturile proporționale ($a/a' = b/b' = c/c'$).

Două triunghiuri asemenea au unghiurile egale două cîte două și laturile opuse unghiurilor egale, proporționale.

Cu notațiile de pe figură, avem $S/S' = a^2/a'^2 = h^2/h'^2$.

4. Se zice că un triunghi este *orientat* dacă se dă un sens de parcurgere pe perimetrul său (fig.68). De obicei acesta se zice că este *pozitiv*, sau *direct*, dacă în parcurgerea perimetrului, suprafața triunghiului este lăsată la stînga. Pentru mulțimea punctelor interioare triunghiului, perimetrul său se zice că formează *frontiera* mulțimii.

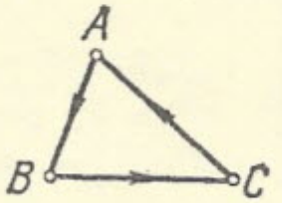


Fig. 68

5. *Relații metrice într-un triunghi oarecare* (segmentele barate sînt orientate § 4.1.1)

a) *Teorema bisectoarelor* (fig. 69). Dacă D și E sînt picioarele bisectoarelor unghiului A, atunci

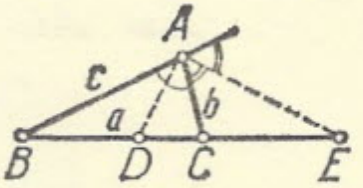


Fig. 69

$$(239)\quad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{c}{b};$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{c}{b};\quad \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}};$$

ultima relație spune că punctele B, C, D, E formează o *diviziune armonică* (§ 6.2).

b) *Teorema lui Pitagora generalizată.* Într-un triunghi oarecare

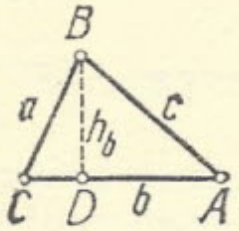


Fig. 70

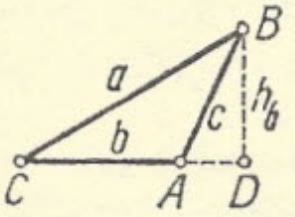


Fig. 71

(240) $a^2 = b^2 + c^2 - 2\varepsilon b\, AD$, $(\varepsilon = \pm 1)$, $\varepsilon = 1$, dacă A este ascuțit (fig. 70), $\varepsilon = -1$ dacă A este obtuz (fig. 71).

c) *Teorema lui Stewart* (fig. 72). Dacă O este exterior dreptei ACB, atunci

$$(241)\quad \frac{OA^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} + \frac{OB^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}} + \frac{OC^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}} = 1.$$

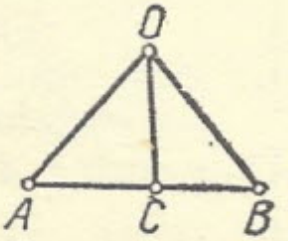


Fig. 72

Cu ajutorul acestei formule avem posibilitatea să calculăm pe OC, cunoscînd poziția lui C pe AB în triunghiul AOB.

d) *Teorema lui Menelaus* (fig. 73). Trei puncte A', B', C' situate pe laturile unui triunghi sînt coliniare dacă şi numai dacă

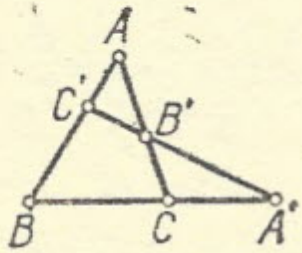


Fig. 73

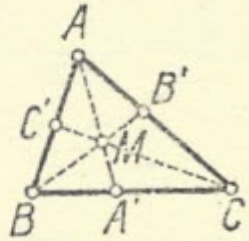


Fig. 74

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1. \tag{242}$$

e) *Teorema lui Ceva* (fig. 74). Trei drepte AA', BB', CC' care trec prin vîrfurile unui triunghi (numite uneori *ceviene*) sînt concurente dacă şi numai dacă

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1. \tag{243}$$

6. Triunghiuri particulare.

a) *Triunghiul dreptunghic* ($A = 90°$) (§ 3.3.1), are o singură înălţime (celelalte două confundîndu-se cu catetele) (fig. 75).

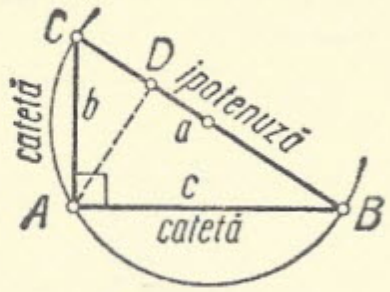


Fig. 75

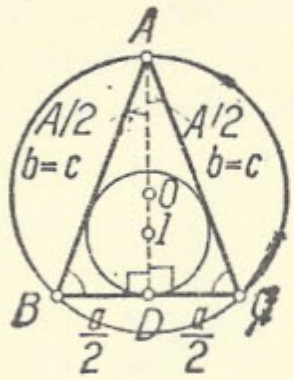


Fig. 76

Un triunghi este dreptunghic dacă şi numai dacă

(244) $a^2 = b^2 + c^2$ *(teorema lui Pitagora).*

De asemenea, dacă şi numai dacă centrul cercului circumscris este la mijlocul uneia din laturi (ipotenuza). Avem de asemenea relaţiile

(245) $b^2 = a \cdot CD,\ c^2 = a \cdot BD,\ AD^2 = BD \cdot DC$

(246) $a = 2R,\quad r = p - a.$

b) *Triunghiul isoscel* (fig. 76). Este triunghiul care are două unghiuri egale ($B = C$) sau două laturi egale ($b = c$).

Un triunghi este isoscel dacă şi numai dacă: două din dreptele: înălţimea, mediana, bisectoarea unui aceluiaşi vîrf A sînt confundate. Dacă două se confundă, se confundă şi a treia cu ele; una din egalităţile

(247) $h_b = h_c,\ m_b = m_c,\ l_b = l_c$

are loc, cînd vor avea loc şi celelalte.

Înălțimea vîrfului A este axă de simetrie (§ 5.5.1) pentru triunghi. Dacă $l'_b = l'_c$ triunghiul poate fi isoscel, dar mai sînt și alte triunghiuri care se bucură de această proprietate și care se numesc triunghiuri *pseudoisoscele*.

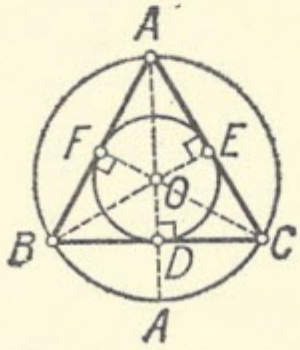


Fig. 77

c) *Triunghiul echilateral* (fig. 77) este triunghiul care are toate unghiurile egale ($A = B = C = 60°$) sau toate laturile egale ($a = b = c$). Înălțimea, mediana și bisectoarea fiecărui vîrf sînt confundate între ele. Ortocentrul, centrul de greutate și centrele cercurilor înscris și circumscris, sînt toate confundate în același punct. Cercul circumscris și cu cel înscris, sînt concentrice. Orice înălțime este axă de simetrie pentru triunghi. Avem relațiile

$$(248)\quad a = R\sqrt{3};\quad h_a = m_a = l_a = \ldots = \frac{3}{2}R,$$

$$S = 3\sqrt{3}\,R^2/4.$$

7. Se dau trei drepte concurente OD_1, OD_2, OD_3 și un fascicul de drepte paralele ABC, $A'B'C'$,

$A''B''C''$, ... (fig. 78). Dreptele sînt concurente dacă şi numai dacă

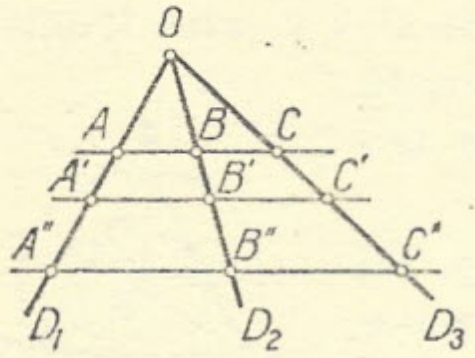


Fig. 78

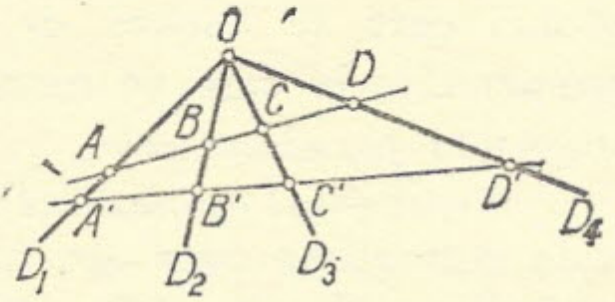


Fig. 79

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{B''A''}}{\overline{B''C''}} = \dots \tag{249}$$

Se dau patru drepte concurente OD_1, OD_2, OD_3, OD_4 şi două secante oarecare $ABCD$, $A'B'C'D'$ (fig. 79), atunci

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = \frac{\sin \widehat{COA}}{\sin \widehat{COB}} : \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}, \tag{250}$$

unde $(ABCD)$ este biraportul celor patru puncte (§ 6.2), şi se numeşte *biraportul dreptelor* OD_1, ..., OD_4.

§ 4.5. Patrulatere

1. Figura plană formată de patru puncte A, B, C, D (din care trei nu sînt coliniare), se numește *patrulater*; un patrulater are 4 *vîrfuri*, 4 *laturi*, 2 *diagonale* (drepte care unesc două vîrfuri opuse) și 4 *unghiuri*. Patrulaterul se zice că este *convex* (fig. 80) dacă prelungindu-i laturile nu-i taie *suprafața* și *concav* în caz contrar (fig. 81). În cele ce urmează considerăm numai patrulatere convexe. Notînd unghiurile cu A, B, C, D avem relațiile

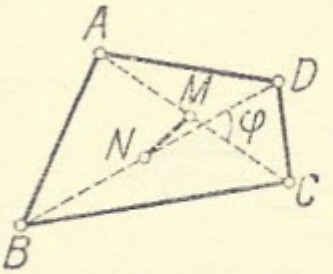


Fig. 80

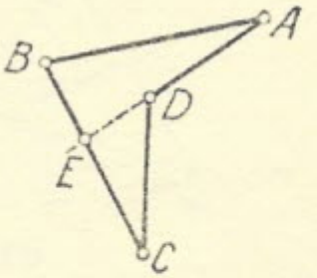


Fig. 81

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ, \tag{251}$$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2, \tag{252}$$

$$4S = \sqrt{(2AC \cdot BD)^2 - (AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2)^2} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \varphi, \tag{253}$$

unde S este aria patrulaterului, M, N mijloacele diagonalelor, iar φ unghiul diagonalelor.

2. Figura formată de patru drepte coplanare (din care trei nu sînt concurente), se numește *patrulater complet* (fig. 82). Un patrulater complet are 6 *vîrfuri*, 4 *laturi* și 3 *diagonale*.
Avem proprietățile:

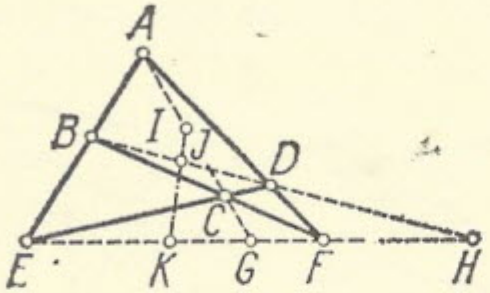


Fig. 82

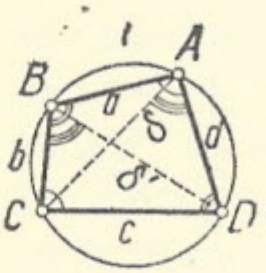


Fig. 83

a) Mijloacele diagonalelor sînt trei puncte coliniare.
b) $(EFGH) = -1$ (§ 6.2) (*teorema lui Pappus*).

3. Patrulatere particulare.

a) *Patrulaterul inscriptibil* este patrulaterul căruia i se poate circumscrie un cerc (fig. 83). Vîrfurile unui patrulater inscriptibil se numesc *puncte conciclice*. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă:

α) Unghiurile opuse sînt suplimentare ($\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180°$).

β) Două laturi opuse fac cu cele două diagonale unghiuri egale ($\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ etc.).

Cu notațiile de pe figură avem relațiile:

(254) $ac + bd = \delta\delta'$ (*prima teoremă a lui Ptolomeu*, care este și reciprocă).

(255) $\dfrac{ad + bc}{ab + cd} = \dfrac{\delta}{\delta'}$ (*a doua teoremă a lui Ptolomeu*).

(256) $S = \sqrt{(p - a)\ (p - b)\ (p - c)\ (p - d)}$ $(2p = a + b + c + d,\ S$ aria).

(257) $\delta^2 = \dfrac{(ac + bd)\ (ad + bc)}{ab + cd},$

$\delta'^2 = \dfrac{(ac + bd)\ (ab + cd)}{ad + bc}.$

(258) $R = \dfrac{(ab + cd)\delta}{4S} = \dfrac{(ad + bc)\delta'}{4S} =$

$= \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{(ac + bd)\ (ad + bc)\ (ab + cd)}{(p - a)\ (p - b)\ (p - c)\ (p - d)}}.$

(259) $S = \sqrt{abcd}$, dacă patrulaterul poate fi în același timp și circumscris unui al doilea cerc.

b) *Trapezul* (fig. 84) este un patrulater care are două *laturi paralele* AB, CD numite *baze*, și două *laturi neparalele* BC, AD. Dacă $BC = AD$, tra-

pezul se numește *isoscel*, are diagonalele egale și este inscriptibil într-un cerc. Dacă din unghiurile trapezului unul este drept, trapezul se numește *dreptunghi*. Segmentul BG care măsoară distanța dintre baze se numește *înălțime*. Dacă E, F sînt mijloacele laturilor neparalele, atunci

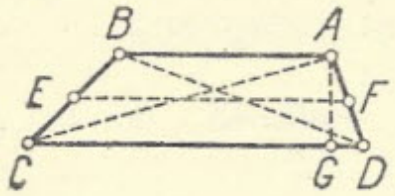


Fig. 84

$$(260)\quad \left|\begin{array}{l} EF = \dfrac{1}{2}(AB+CD); \\ S = \dfrac{1}{2}(AB+CD)AG = EF \cdot AG. \end{array}\right.$$

c) *Paralelogramul* (fig. 85) este caracterizat prin una din proprietățile:

α) Laturile opuse sînt paralele ($AB \| CD$, $AD \| BC$).

β) Unghiurile opuse egale ($\widehat{A} = \widehat{C}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$).

γ) Laturile opuse egale ($AB = CD$, $AD = BC$).

δ) Două laturi opuse și paralele ($AB = CD$ și $AB \| CD$).

ε) Diagonalele se taie în părți egale ($OA = OC$, $OB = OD$).

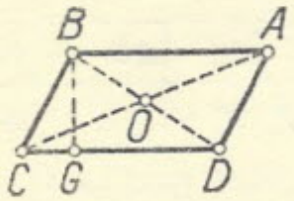


Fig. 85

Cînd o proprietate are loc, au loc și celelalte patru. O se numește *centrul* paralelogramului și este

centrul de simetrie. BG se numește *înălțimea* paralelogramului și aria lui este egală cu

$$(261) \quad \boxed{S = AB \cdot BG.}$$

d) *Dreptunghiul* (fig. 86) este un paralelogram particular care are un unghi drept (cînd rezultă toate vor fi drepte); sau diagonalele egale. Este singurul paralelogram inscriptibil într-un cerc de rază $\frac{1}{2} AC$ și de centru O. Paralele duse prin O la laturile dreptunghiului sînt *axe de simetrie* pentru dreptunghi, iar O este *centru de simetrie*.

e) *Pătratul* (fig. 87) este un dreptunghi care are toate laturile egale; are de asemenea diagonalele perpendiculare și egale. Afară de simetriile dreptunghiului, are și diagonalele ca axe de sime-

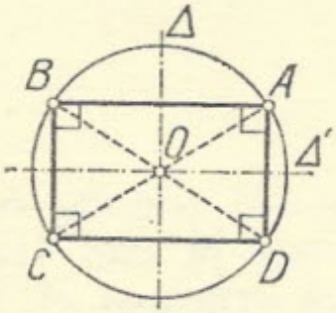


Fig. 86

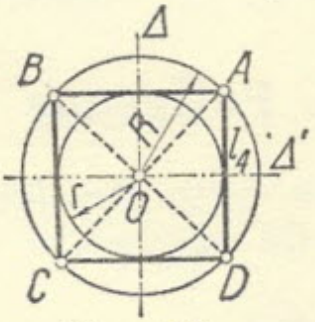


Fig. 87

trie. Este un patrulater care se poate înscrie și circumscrie unui cerc; primul are raza $\frac{1}{2} AC$ iar al doilea $\frac{1}{2} AB$. Notînd R raza cercului cir-

cumscris, r raza cercului înscris, l_4 latura și S_4 aria pătratului, atunci

$$(262)\quad \boxed{l_4 = R\sqrt{2},\ r = \frac{1}{2}R\sqrt{2} = \frac{1}{2}l_4,\ S_4 = 2R^2.}$$

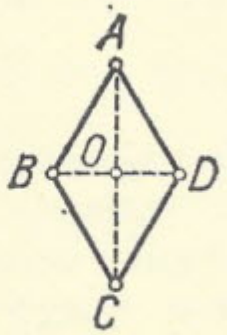


Fig. 88

f) *Rombul* (fig. 88) este paralelogramul care are:

α) Toate laturile egale.

β) Diagonalele perpendiculare.

Pătratul este un romb particular avînd diagonalele egale. Triunghiurile ABD, BCD și ABC, ACD sînt isoscele două cîte două. Are diagonalele ca axe de simetrie și centrul ca centru de simetrie.

§ 4.6. Poligoane

1. Se numește *linie poligonală* plană, o succesiune de segmente așezate cap la cap (fig. 89).

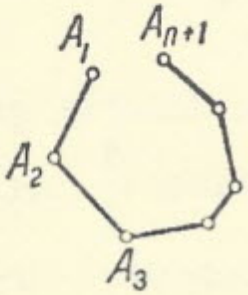


Fig. 89

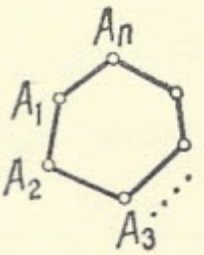


Fig. 90

Dacă originea A_1 se confundă cu extremitatea A_{n+1}, figura formată se numește *poligon* care poate fi *convex* (fig. 90) sau *concav* (fig. 91) (§ 4.5 1) Un poligon cu *n vîrfuri*

are n *laturi* şi $\frac{1}{2}n(n-3)$ *diagonale*; suma unghiurilor interioare este egală cu $180^\circ\ (n-2)$.

O latură a unui poligon este mai mică decît suma celorlalte laturi. Două poligoane (fig. 92)

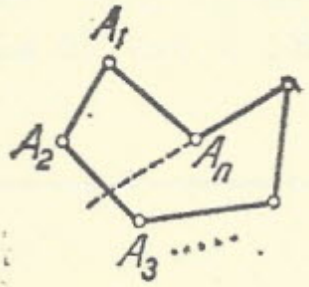


Fig. 91

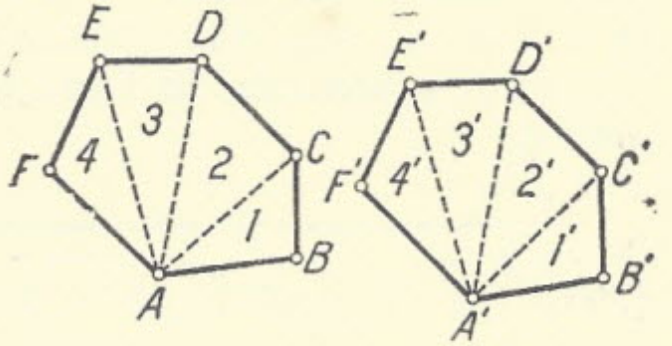


Fig. 92

cu acelaşi număr de laturi şi de aceeaşi natură (convexe sau concave în acelaşi timp) vor fi *egale* dacă se pot descompune în triunghiuri consecutive egale şi la fel aşezate.

2. Dacă un poligon convex are toate laturile şi unghiurile egale, se zice că este *regulat*; unghiul unui poligon regulat este egal cu $180^\circ\ (n-2)/n$. Un poligon regulat se poate *înscrie* sau *circumscrie* unui cerc, ambele avînd acelaşi centru care se numeşte *centrul* poligonului. Raza cercului circumscris se numeşte *raza* poligonului, iar raza cercului înscris, *apotema* poligonului. Notînd l_n latura, a_n apotema, S_n aria, avem

(163) $$\boxed{S_n = \frac{1}{2} n l_n a_n.}$$

3. Dacă împărţim un cerc de rază R în n părţi egale, şi unim punctele consecutive, se obţine un poligon regulat cu n laturi. Dacă le unim din p în p şi dacă poligonul se închide trecînd prin toate punctele de diviziune, vom spune că poligonul este *stelat* cu n laturi. La (§ 4.4.6, III) şi (§ 4.5.3, V) am dat elementele *triunghiului echilateral* şi *pătratului* în funcţie de R; avem de asemenea:

(264) $$l_5 = \frac{1}{2} R \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$a_5 = \frac{1}{4} R (\sqrt{5} + 1).$$

(265) $$l_6 = R;$$

$$a_6 = \frac{1}{2} R \sqrt{3}.$$

(266) $$l_8 = R \sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

$$a_8 = \frac{1}{2} R \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

(267) $$l_{10} = \frac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1);$$

$$a_{10} = \frac{1}{4} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

(268) $$\left|\begin{array}{l} l'_5 = \frac{1}{2} R \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}; \\ l'_{10} = \frac{1}{2} R (\sqrt{5} + 1) \text{ (poligoane stelate).} \end{array}\right.$$

Dacă cunoaștem latura l_n a poligonului regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază R, atunci

(269) $$l_{2n}^2 = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2}\right).$$

§ 4.7. Construcții geometrice cu rigla și compasul

1. *Să se împartă un segment AB în două părți egale* (fig. 93). Din A și B ca centre, cu o rază $\left(> \frac{AB}{2}\right)$, se descriu două arce de cerc care se taie în C, D; CD este perpendiculară pe AB și o împarte în părți egale.

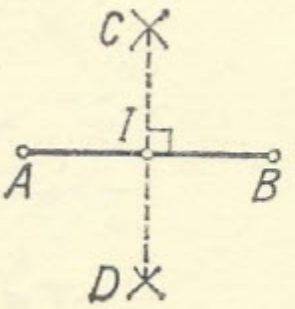


Fig. 93

2. *Printr-un punct A, să se ducă o perpendiculară pe o* dreaptă Δ.

a) Din A ca centru se descrie un cerc care taie pe Δ în B și C; din B și C cu aceeași rază se descriu două arce care se taie în D și AD este perpendiculara

căutată (fig. 94 cînd A este exterior şi fig. 95 cînd A este pe dreaptă).

b) Dacă A este la una din extremităţile dreptei Δ (fig. 96), dintr-un punct arbitrar O se descrie

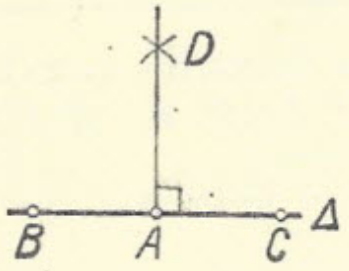


Fig. 94

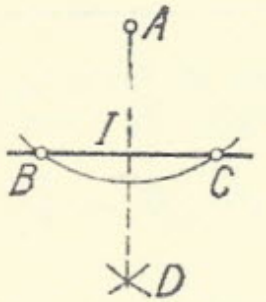


Fig. 95

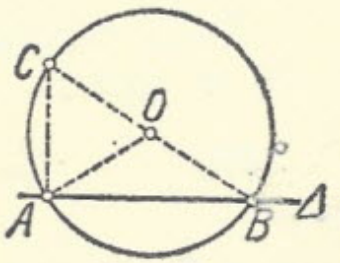


Fig. 96

un cerc cu raza OA, care taie din nou pe Δ în B; OB taie cercul în C şi perpendiculara este AC. Dacă A este exterior (fig. 97) se duce dreapta AB arbitrară pe care ca diametru se descrie un cerc care taie din nou pe Δ în C; perpendiculara este AC.

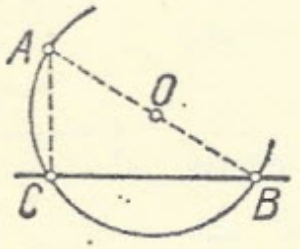


Fig. 97

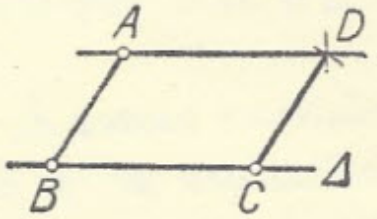


Fig. 98

3. *Printr-un punct A exterior dreptei Δ, să se ducă o paralelă la aceasta* (fig. 98). Se iau pe Δ punctele B, C şi din A, C ca centre se descriu două

respectiv de raze BC, BA care se taie în D. căutată este AD.

4. *Să se împartă un segment AB în părți proporționale cu trei* (sau mai multe) *lungimi date*

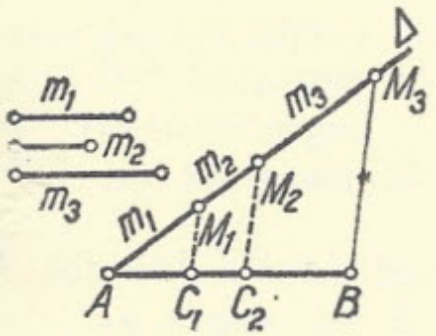


Fig. 99

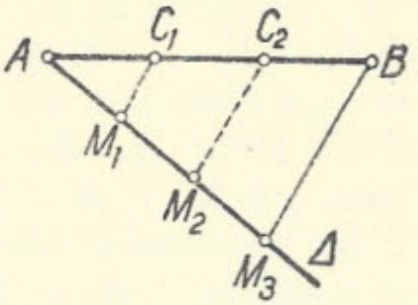


Fig. 100

m_1, m_2, m_3 *(sau trei numere date)* (fig. 99). Prin A se duce o dreaptă arbitrară Δ pe care în continuare se măsoară m_1, m_2, m_3. Se unește ultima extremitate M_3 cu B și prin punctele intermediare M_1, M_2 se duc paralele cu BM_3 care taie pe AB în C_1, C_2 astfel ca $AC_1 / m_1 = C_1C_2 / m_2 = C_2B/m_3$. Dacă se dau trei numere p_1, p_2, p_3, se ia un segment arbitrar AU și se măsoară pe Δ, $AM_1 = p_1AU$, ...

5. *Să se împartă un segment AB în n părți egale* ($n \in N$) (fig. 100). Se iau pe dreapta auxiliară Δ, n segmente egale și se continuă ca la problema precedentă.

6. *Fiind date segmentele* OA, OB, ..., *să se construiască segmentele* OA', OB', ... *astfel ca*

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \ldots = k.$$

Se ia pe dreapta Δ pe care sînt măsurate segmentele OA, OB, ... (fig. 101) un segment arbitrar OU, iar pe dreapta arbitrară Δ' segmentul $OU' = k\,OU$. Prin A, B, ... se duc paralele cu UU' care taie pe Δ' în A', B',

7. *Prin punctul* O (sau A) *să se ducă o dreaptă* D *care să facă cu o dreaptă dată* Δ *un unghi* α.

a) O *este pe* Δ (fig. 102). Din vîrful unghiului şi din O ca centre se descriu două cercuri egale; se măsoară arcele $\overset{\frown}{B'C'} = \overset{\frown}{B''C''} = \overset{\frown}{BC}$

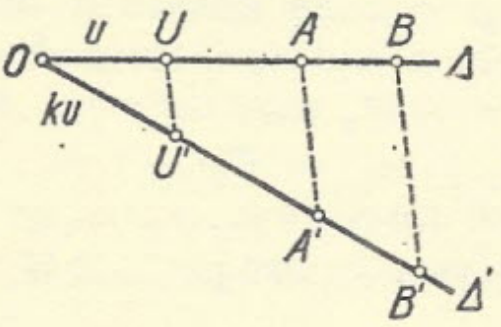


Fig. 101

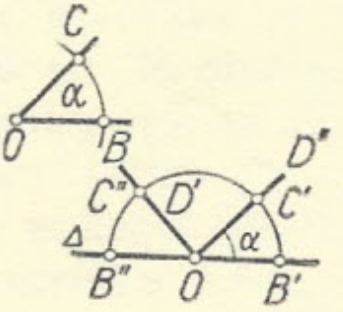


Fig. 102

tot cu compasul. Se obţin soluţiile $\widehat{B'OC'} = \widehat{B''OC''} = \alpha$.

b) *A este exterior lui* Δ (fig. 103). Se duce prin A o paralelă cu Δ şi se procedează ca la cazul precedent obţinîndu-se dreptele D' şi D''.

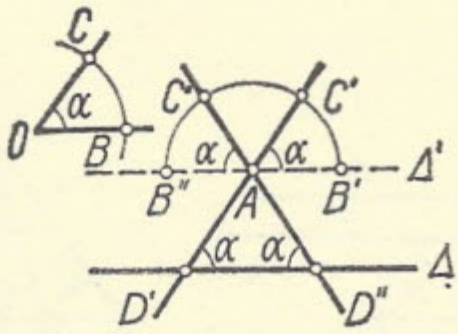


Fig. 103

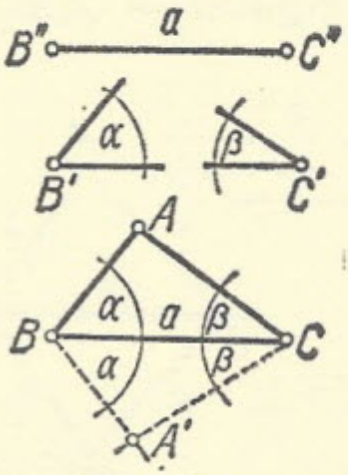
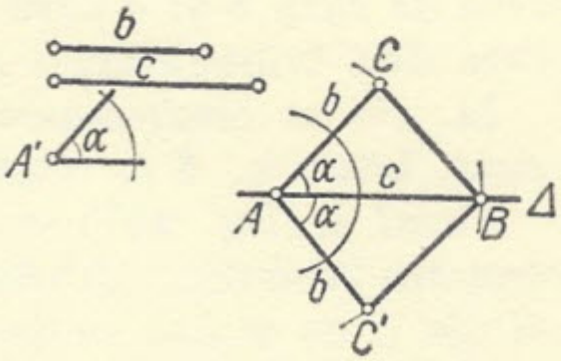


Fig. 104

8.*) *Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i o latură* a *şi unghiurile adiacente* B, C (fig. 104). Se măsoară segmentul $BC = a$ şi în B, C se construiesc unghiurile date. Se obţin două triunghiuri ABC, $A'BC$ invers egale (§ 4.4.2).



FiS. 105

9. *Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i două laturi* b, c *şi unghiul cuprins* A (fig. 105). Într-un punct A pe o

*) Pentru construcţiile 8—11 a se vedea (§ 3.3.2, cazurile de rezolvare).

dreaptă Δ se construieşte unghiul A de-o parte şi de alta. Apoi pe Δ se măsoară $AB = c$, iar pe celelalte laturi $AC = AC' = b$. Se obţin triunghiurile ABC, ABC' invers egale.

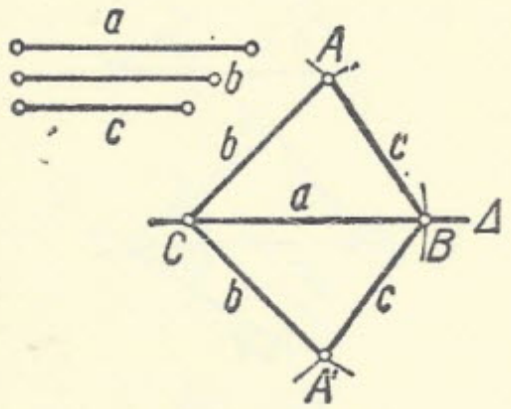
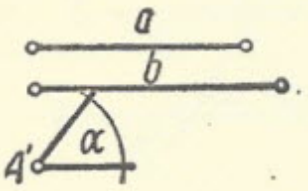


Fig. 106



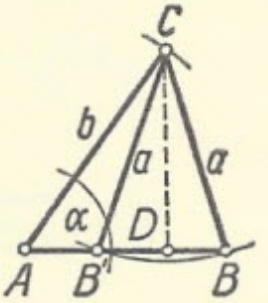


Fig. 107

10. *Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i cele trei laturi* a, b, c (fig. 106). Pe o dreaptă Δ se ia $BC = a$ şi apoi în B şi C se construiesc două arce de raze b şi c care se taie în punctele A, A' care dau triunghiurile ABC, $A'BC$ invers egale.

11. *Să se construiască un triunghi cunoscîndu-i două laturi* a, b *şi unghiul* A *opus uneia din ele.*

Cazul I (fig. 107) $A<90°$, $b \geqslant a \geqslant b \sin A$. Pe una din laturile unghiului A se construieşte $AC = b$ şi din C ca centru se descrie un arc de rază a care taie cealaltă latură în B şi B' ($b>a$) care dă triunghiurile ACB, ACB' (2 soluţii); dacă $a = b$, $A \equiv B'$ şi avem triunghiul isoscel ABC (1 solu-

ție), iar dacă $a = b \sin A$ avem triunghiul dreptunghic ACD (1 soluție).

Cazul II (fig. 108) $A \geqslant 90°$, $a > b$. Aceeași construcție conduce la triunghiul ABC (1 soluție)

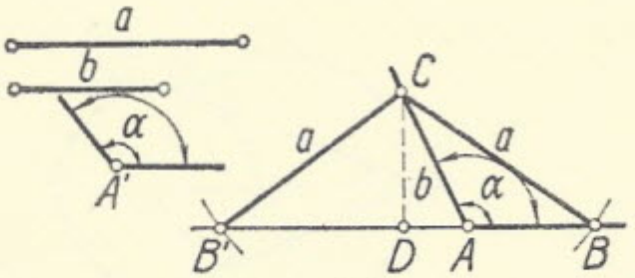


Fig. 108

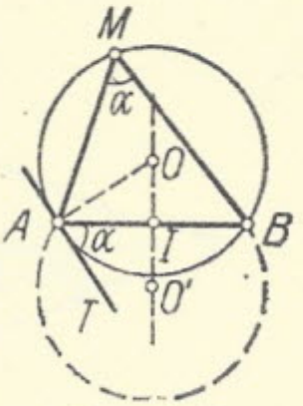


Fig. 109

sau triunghiul dreptunghic CDB (precum și inversul său CDB') (1 soluție).

12. *Pe segmentul AB să se construiască un arc de cerc capabil de unghiul dat α* (fig. 109). În A se construiește $\widehat{BAT} = \alpha$. Perpendicularele în A pe AT și pe mijlocul lui AB se taie în O. Arcul *AMB și simetricul său față de AB* sînt soluțiile problemei.

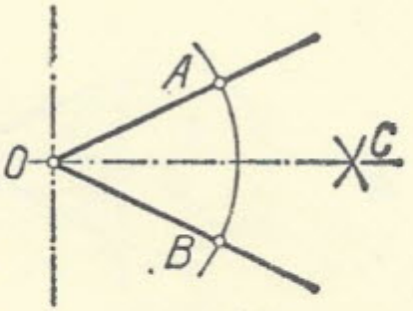


Fig. 110

13. *Să se construiască bisectoarele unui unghi.* a) *Vîrful O este accesibil* (fig. 110). Se construiește un arc cu centrul în O, care taie laturile în A și B; din aceste puncte, cu aceeași deschidere de compas se con-

struiește C: bisectoarea interioară este OC; perpendiculara pe ea în O este bisectoarea exterioară.

b) *Vîrful O este inaccesibil* (fig. 111). Pe laturile unghiului se construiesc perpendicularele Δ_1' și

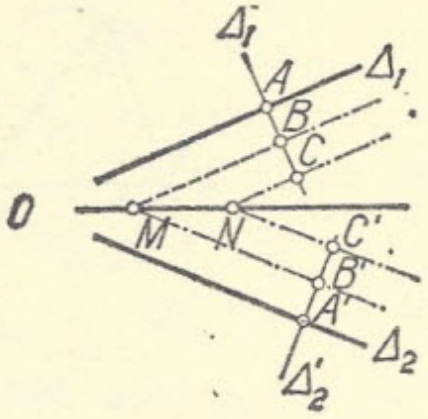


Fig. 111

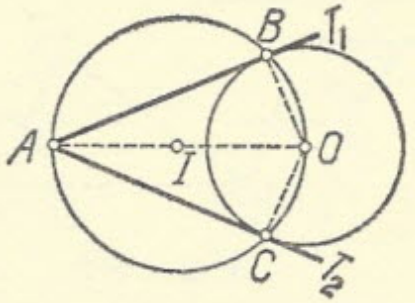


Fig. 112

Δ_2' pe care se iau segmentele $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. Prin B și C, respectiv B' și C' se duc paralele cu laturile unghiului care se taie în M, N pe bisectoarea căutată.

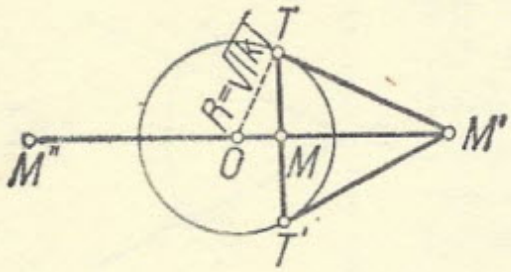


Fig. 113

14. *Să se ducă printr-un punct exterior A, tangente la un cerc O* (fig. 112). Pe OA ca diametru se descrie un cerc auxiliar care taie cercul dat în B și C; dreptele AB, AC sînt tangentele căutate.

15. *Fiind date punctele O și M, să se determine punctul M'* astfel ca: $OM \cdot OM' = k$ (fig. 113).

Se construieşte un cerc cu centrul în O şi de rază $\sqrt{|k|}$; avem două cazuri:

a) Dacă M este interior, se duce o perpendiculară pe OM care taie cercul în T şi tangenta în T taie pe OM în M';

b) Dacă M este exterior (pe figură M'), se duc tangentele MT, MT' iar TT' taie pe OM în M' (pe figură M). Această construcţie este făcută în ipoteza $k>0$; cînd $k<0$, vom lua pentru M', punctul M'' simetricul lui M' faţă de O.

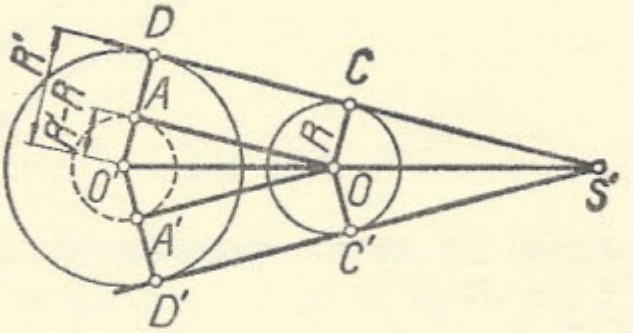


Fig. 114

16. *Să se construiască tangentele comune la două cercuri exterioare date.*

a) *Tangente exterioare* (fig. 114). Fie R raza cercului O şi R' raza cercului $O'(R'>R)$. Cu centrul în O' se construieşte cercul de rază $R'-R$ şi i se construiesc tangentele duse din O. La distanţa R de aceste tangente se găsesc tangentele căutate.

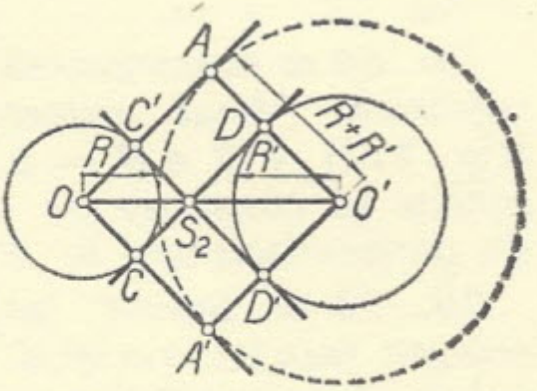


Fig. 115

b) *Tangente interioare* (fig. 115). Aceeaşi metodă numai că cercul auxiliar va fi de rază $R+R'$.

17. *Să se găsească a patra proporțională a trei segmente date a, b, c (sau a trei numere a, b, c)* $(a/b = c/x)$ (§ 1.3.4) (fig. 116). Pe laturile unui

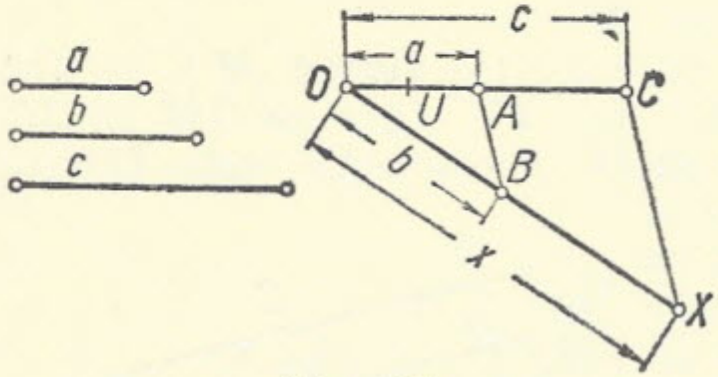


Fig. 116

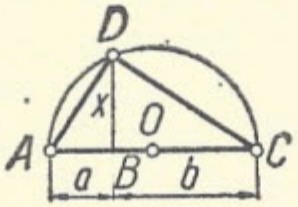


Fig. 117

unghi se așază segmentele ca în figură; se unește A cu B și prin C se duce o paralelă cu AB. Avem $OX = x$. Dacă se dau trei numere, se ia un segment arbitrar $OU = u$ și apoi, $OA = au$, $OB = bu$, $OC = cu$.

18. *Să se construiască medie proporțională a două segmente (două numere) a, b, adică* $x^2 = ab$ (fig. 117). Fie $AB = a$, $BC = b$ și pe AC ca diametru se construiește un semicerc care este tăiat de perpendiculara în B pe AC astfel ca $BD = x$.

19. *Să se înscrie într-un cerc O un pătrat, un octogon regulat, ș.a.m.d.* (fig. 118). Vîrfurile pătratului sînt punctele unde două diametre perpendiculare taie cercul. Pentru octogon se coboară perpendiculare din O pe laturi care taie cercul în patru puncte care împreună cu vîrfurile pătra-

tului determină vîrfurile octogonului. Pentru un poligon regulat cu 16 laturi se repetă construcţia faţă de laturile octogonului ş.a.m.d.

20. *Să se înscrie într-un cerc O un triunghi echilateral, un exagon regulat, un poligon regulat cu*

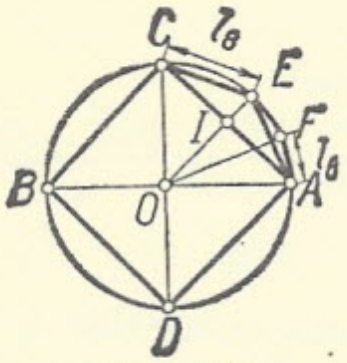


Fig. 118

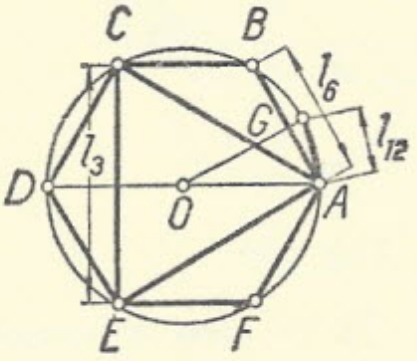


Fig. 119

12 laturi, ş.a.m.d. (fig. 119). Purtînd pe cerc coarde egale cu raza cercului, se obţin 6 puncte care sînt vîrfurile unui exagon regulat înscris în cerc. Unindu-se vîrfurile din două în două obţinem triunghiul echilateral înscris. Trecerea la un poligon regulat cu 12 laturi se face ca de la pătrat la octogon (§ 4.7.19).

21. *Să se înscrie într-un cerc dat O, un pentagon regulat, un decagon regulat ş.a.m.d.* (fig. 120). În cerc se construiesc diametrele perpendiculare A_1A', NN'; din M, mijlocul lui $A'O$, ca centru se descrie un cerc de rază MN care taie diametrul

A_1A' în P și Q. Avem $l_{10} = OP$ iar $l'_{10} = OQ$ (decagon stelat) ș.a.m.d. Pentagonul se obține unind vîrfurile decagonului din două în două.

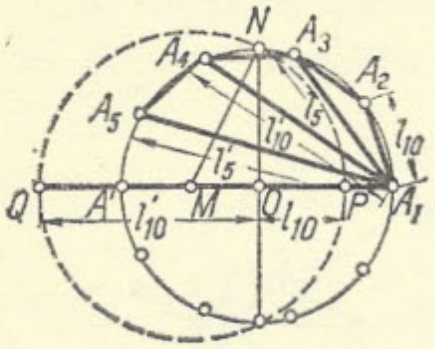


Fig. 120

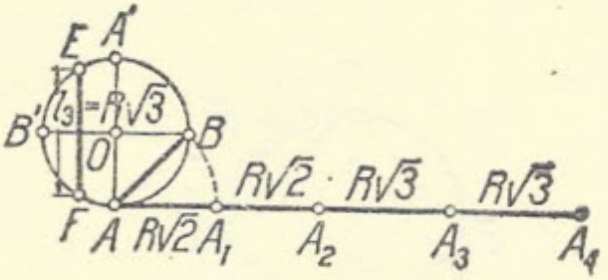


Fig. 121

22. *Să se dea o construcție aproximativă a desfășuratei cercului pe o dreaptă* Δ (fig. 121). Se așază una după alta de două ori l_4 și de două ori l_3, deoarece $2(l_4 + l_3) = 2R\,(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 2R \times 3{,}14$.

5. GEOMETRIA EUCLIDIANĂ A SPAȚIULUI

§ 5.1. Drepte și plane

1. Drepte și plane paralele. Planul este suprafața pe care așezînd o dreaptă, îi conține toate punctele. O dreaptă împarte un plan în două *semiplane*; un plan împarte spațiul în trei regiuni dintre care una este formată din punctele planului. Față de un plan, o dreaptă poate avea una din pozițiile (fig. 122):

a) Conținută în plan. b) Are un singur punct în plan. c) *Paralelă* cu planul, cînd nu are nici un punct comun cu el. Un plan poate fi definit prin trei puncte necoliniare, o dreaptă și un punct exterior ei, două drepte paralele. Două plane distincte, care au un punct comun, au o infinitate de puncte comune situate pe o dreaptă, *dreapta de intersecție* a celor două plane. Două plane care nu au nici un punct comun, se zice că sînt *paralele*.

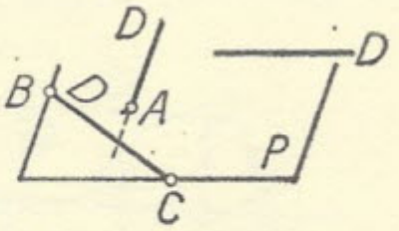


Fig. 122

Printr-o dreaptă D (fig. 123) trec o infinitate de plane care formează un *fascicul* avînd ca *muchie* pe D. Un plan al fasciculului este determinat prin muchie și un punct A exterior ei; iar un fascicul este determinat prin **două** plane ale sale P_1, P_2.

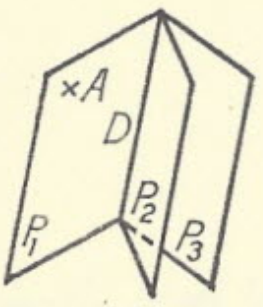


Fig. 123

Două drepte distincte în spațiu pot:

a) Să fie *concurente*, cînd au un punct comun. b) Să fie *paralele*. c) Să nu aibă nici un punct comun și nici să fie paralele, cînd se zice că sînt *strîmbe* în spațiu.

Prin unghiul a două asemenea drepte, înțelegem unghiul paralelelor duse printr-un punct al spațiului.

2. Două drepte paralele cu o a treia sînt paralele între ele. Dacă D este paralelă cu planul P (fig. 124), orice plan Q care trece prin D taie P

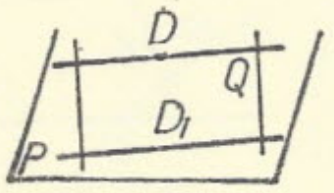


Fig. 124

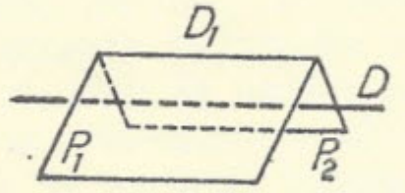


Fig. 125

după o dreaptă D_1 paralelă cu D. Două plane P_1, P_2 paralele cu aceeași dreaptă D se taie după o dreaptă D_1 paralelă cu D (fig. 125). Orice dreaptă D dintr-un plan P paralel cu un plan Q este para-

lelă cu planul Q (fig. 126). Invers, un plan Q, paralel cu două drepte dintr-un plan P este paralel cu P. Printr-un punct exterior unui plan P se poate duce un plan Q paralel cu acesta și numai

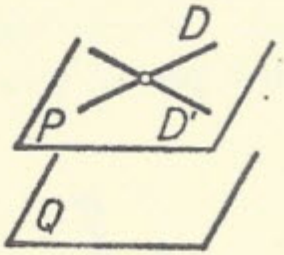


Fig. 126

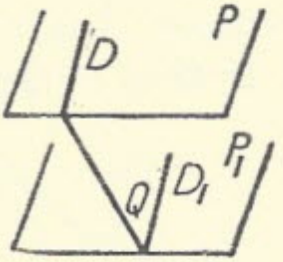


Fig. 127

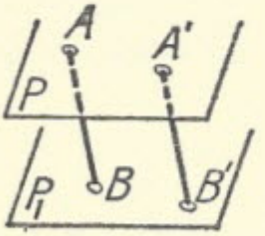


Fig. 128

unul. Două plane paralele P, P_1 sînt tăiate de un al treilea Q după două drepte paralele (fig. 127). Două plane paralele (fig. 128) determină pe două drepte paralele segmente egale ($AB = A'B'$). Trei sau mai multe plane paralele (fig. 129) deter-

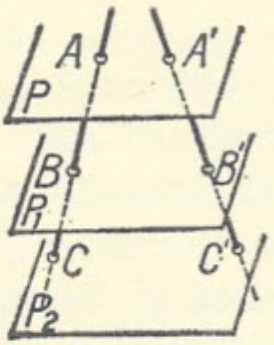


Fig. 129

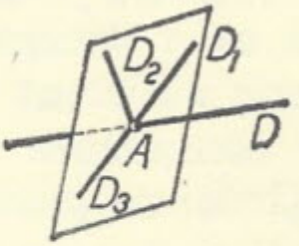


Fig. 130

mină pe două secante, segmente proporționale ($AB/BC = A'B'/B'C'$).

3. Drepte și plane perpendiculare. Într-un punct A situat pe dreapta D (fig. 130) se pot duce o

infinitate de drepte perpendiculare pe ea care formează un plan P *perpendicular* pe dreapta D; dreapta D se numește *normală* pe planul P. Dintr-un punct exterior unui plan se poate duce o singură perpendiculară pe el. Un plan P are o infinitate de normale toate paralele între ele. Invers, o dreaptă D este *perpendiculară* pe un plan

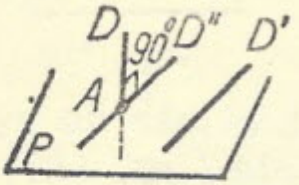


Fig. 131

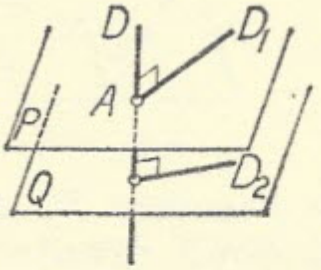


Fig. 132

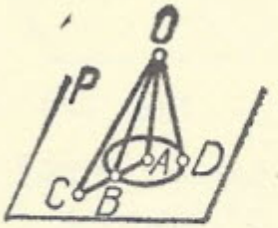


Fig. 133

P (fig. 131), dacă este perpendiculară pe paralela ei dusă prin A.

O dreaptă perpendiculară pe un plan P, va fi perpendiculară pe orice plan Q paralel cu P (fig. 132). Pentru ca o dreaptă să fie perpendiculară pe un plan este suficient să fie perpendiculară pe două drepte concurente ale planului. Printr-un punct al spațiului se poate duce un plan și numai unul perpendicular pe o dreaptă. Două plane perpendiculare pe o dreaptă, sînt paralele între ele.

Dacă dintr-un punct O, exterior unui plan (fig. 133) ducem pe acest plan perpendiculara și mai multe *oblice*, atunci:

a) Perpendiculara OA este mai mică decît orice oblică OB şi reprezintă distanţa punctului O la plane.

b) Toate oblicele egal depărtate de *piciorul* perpendicularei sînt egale şi reciproc.

c) Dintre două oblice, cea care este mai aproape de piciorul perpendicularei, este mai mică şi reciproc. A se numeşte *proiecţia* lui O pe planul P.

4. Unghiul diedru a două semiplane (fig. 134). care formează *feţele* unghiului, este egal cu unghiul V determinat de cele două feţe pe un plan Q perpendicular în O pe muchie (egal şi cu unghiul perpendicularelor în O pe fiecare din feţe); *planul bisector*, este planul care-l împarte în două diedre egale (care au aceeaşi măsură).

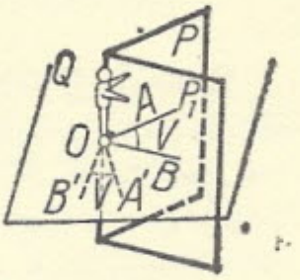


Fig. 134

Dacă două plane sînt perpendiculare (fig. 135), orice perpendiculară pe intersecţia lor şi situată într-unul din plane, este perpendiculară pe celălalt plan; un plan este perpendicular pe un al doilea plan, dacă conţine o perpendiculară pe acesta sau este paralel cu o asemenea perpendiculară. Un plan şi o dreaptă (fig. 136) perpendiculare pe acelaşi plan, sînt paralele între ele.

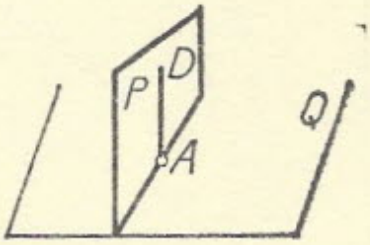


Fig. 135

Dacă două plane P, Q sînt perpendiculare pe un al treilea R (fig. 137), dreapta lor de intersecţie este perpendiculară pe R.

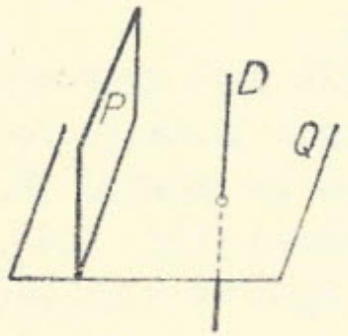


Fig. 136

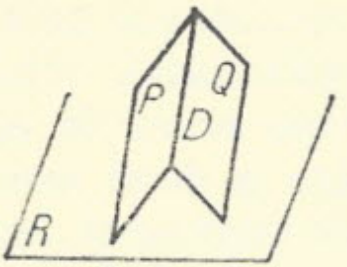


Fig. 137

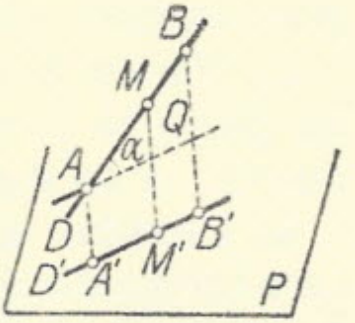


Fig. 138

Locul geometric al proiecţiilor punctelor unei drepte D pe un plan P, este un plan Q perpendicular pe planul P (fig. 138). Intersecţia planelor P, Q este o dreaptă D', *proiecţia* dreptei D pe planul P. Unghiul α pe care-l fac dreptele D, D' între ele măsoară *unghiul dreptei D cu planul P*; el este unghiul cel mai mic pe care-l face D cu o dreaptă oarecare a planului P. Proiecţiile unui segment pe două plane paralele, sînt egale între ele.

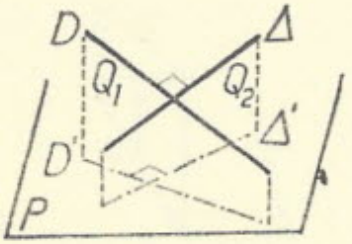


Fig. 139

Teorema celor trei perpendiculare. Dacă D', Δ' sînt proiecţiile a două drepte din spaţiu D, Δ (fig. 139) pe planul P, atunci două din proprietăţile:

a) Dreptele D, Δ sînt perpendiculare.
b) Una din drepte este paralelă cu P.
c) Proiecțiile D', Δ' sînt perpendiculare, au ca consecință pe a treia.

§ 5.2. Corpuri solide determinate de drepte și plane

1. Unghi poliedru este figura geometrică formată de mai multe plane concurente într-un punct O numit *vîrf*. Intersecțiile planelor se numesc *muchii* care mărginesc între ele *fețele* poliedrului (fig. 140). Dacă unghiul poliedru este situat de aceeași parte a fețelor se zice că unghiul este *convex*. *Triedru* este unghiul poliedru cu trei fețe

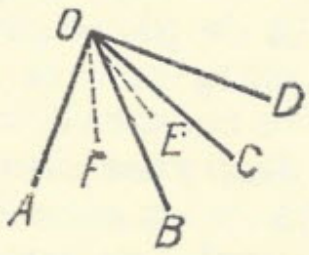


Fig. 140

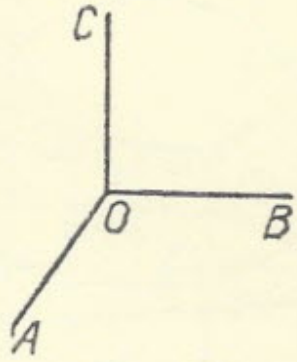


Fig. 141

și trei muchii. Dacă are muchiile perpendiculare două cîte două, se zice că este *tridreptunghic*. În acest caz fiecare muchie este perpendiculară pe fața determinată de celelalte două (fig. 141).

Se numește *corp solid*, o porțiune din spațiul cu trei dimensiuni.

2. Poliedru este un corp solid mărginit de suprafețe plane (fig. 142) și are: *fețe* (ABC, ACD...), *muchii* (AB, AC, AD,...), *vîrfuri* (A, B, C,...), *unghiuri diedre* [(ABC), (ABD), ...], unghiuri solide [(A, BCD), (B, ACD), ...], diagonale (AE, BF, ...). *Aria* poliedrului este suma tuturor ariilor fețelor iar volumul este porțiunea din spațiu care definește corpul. Se zice că poliedrul este *convex* cînd se află de aceeași parte a tuturor fețelor sale. Fețele unui poliedru convex sînt poligoane convexe.

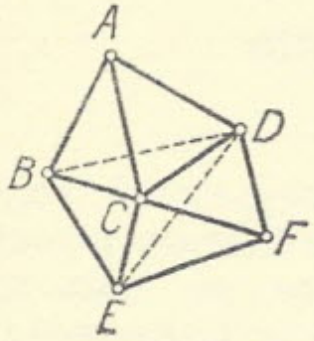


Fig. 142

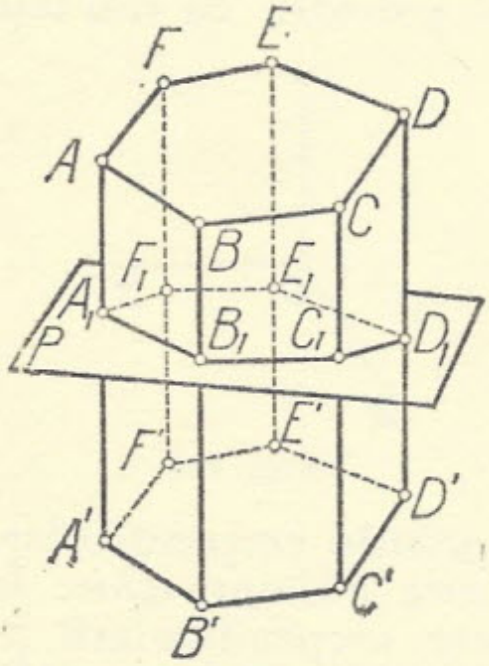


Fig. 143

3. Suprafață prismatică (fig. 143) este suprafața determinată de plane paralele *(fețele)* mărginite la intersecțiile lor consecutive *(muchiile)*. *Secțiunea* făcută în suprafață cu un plan P, care nu este paralel cu muchiile, este un poligon care are același număr de laturi oricare ar fi P; *secțiunea dreaptă* este făcută printr-un plan perpendicular pe muchii.

Prisma (fig. 151) este un poliedru obținut dintr-o suprafață prismatică prin două secțiuni paralele care se numesc *bazele* prismei. *Fețele laterale* ale unei prisme sînt paralelograme; distanța dintre baze se numește *înălțimea* prismei. Dacă planele bazelor sînt perpendiculare pe muchii, prisma se numește *dreaptă*, iar dacă și bazele sînt poligoane regulate, prisma se numește *regulată*. În particular, dacă bazele sînt paralelograme, prisma se numește *paralelipiped* (fig. 152). Paralelipipedul care are toate muchiile egale se numește *romboedru* și are toate fețele romburi. Dacă are muchiile laterale perpendiculare pe baze, paralelipipedul se numește *dreptunghic* (fig. 153). Romboedrul dreptunghic se numește *cub* (fig. 154).

4. Piramida (fig. 155) este corpul ce se obține tăind un unghi poliedru cu un plan care-i întîlnește toate muchiile; poligonul tăiat de acest plan, se numește *baza* piramidei iar fețele și muchiile poliedrului se numesc *fețele laterale* și *muchiile* piramidei. Perpendiculara coborîtă din *vîrful* piramidei (vîrful unghiului poliedrului) pe bază, se numește *înălțime*. Se zice că piramida este *regulată* dacă baza este un poligon regulat și înălțimea cade în centrul acestuia; fețele sînt triunghiuri isoscele a căror înălțime (aceeași pentru toate) se numește *apotema* piramidei (fig. 156). Piramida

*) Figurile se găsesc în tabelul T. 17.

cu baza un triunghi se numește *tetraedru* (fig. 157) care este *regulat* cînd are toate muchiile egale (fig. 144).

Suprafață piramidală (fig. 145) este suprafața

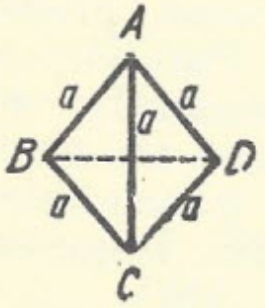


Fig. 144

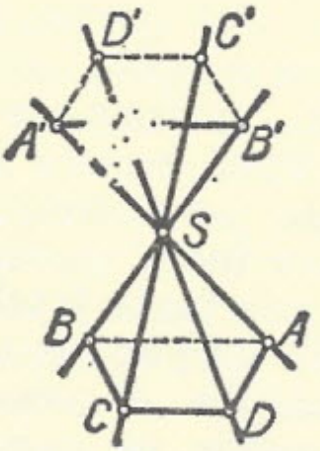


Fig. 145

laterală a unei piramide prelungită dincolo de vîrf și bază.

5. Trunchi de prismă este corpul mărginit de o suprafață prismatică și două secțiuni plane numite *bazele* trunchiului. În fig. 158 avem un trunchi de prismă triunghiular iar în fig. 159 un trunchi de prismă cu patru fețe laterale (grămada de nisip). *Pana* este trunchiul de prismă din (fig. 160).

6. Trunchi de piramidă este corpul ce se obține făcînd într-o piramidă o secțiune paralelă cu baza (fig. 161).

§ 5.3. Suprafețe. Corpuri rotunde

1. Suprafața cilindrică este suprafața născută de o dreaptă *generatoare* AA' care se deplasează paralel cu o direcție dată și se sprijină pe o *curbă directoare* C (fig. 146). Porțiunea dintr-o suprafață cilindrică limitată de două secțiuni paralele *(baze)* se numește *cilindru* (fig. 162); dacă secțiunile sînt perpendiculare pe generatoare, cilindrul se numește *drept*. Distanța între baze se numește *înălțime*; dacă bazele unui cilindru drept sînt cercuri, cilindrul este de *rotație* (fig. 163). Dreapta OO' se numește *axa* cilindrului. Se numește *trunchi de cilindru de rotație* (fig. 164) corpul obținut dintr-un cilindru de rotație secționat prin două plane *(bazele)* care nu sînt perpendiculare pe axă.

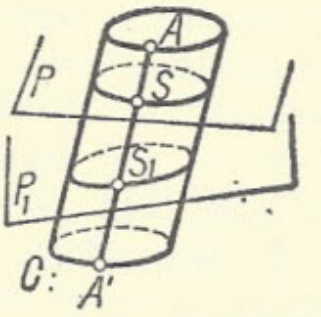


Fig. 146

2. Suprafață conică (fig. 147) este suprafața născută de o *dreaptă generatoare* AA' care trece printr-un punct fix V *(vîrful)* și se sprijină pe o *curbă directoare* C. Vîrful conului împarte suprafața în două părți care se numesc *pînzele* conului. Prin *con* (fig. 165) înțelegem corpul mărginit de o suprafață conică, vîrf

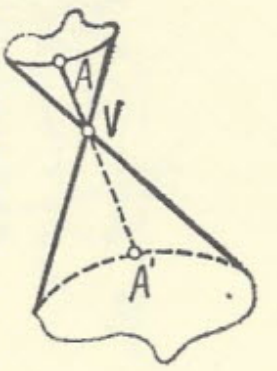


Fig. 147

și o secțiune plană, *baza* conului; distanța vîrfului la bază, se numește *înălțime*. Se numește *trunchi de con* (fig. 166), corpul obținut secționînd un con printr-un plan paralel cu baza, cuprins între vîrf și bază. Un trunchi de con are *două baze*; distanța dintre ele se numește *înălțime*. Dacă baza unui con este un cerc și înălțimea cade în centrul cercului (fig. 167), conul se numește de *rotație*; secționînd un con de rotație printr-un plan paralel cu baza se obține un *trunchi de con de rotație* (fig. 168).

3. Suprafață de rotație (fig. 148) este suprafața născută prin rotația unei *curbe generatoare C* în jurul unei axe Δ. Un punct *A* de pe generatoare, descrie în mișcare un cerc, numit *paralel*, care se află într-un plan perpendicular pe axă și are centrul pe axă. Suprafața poate fi considerată ca născută din mișcarea unui cerc al cărui plan este

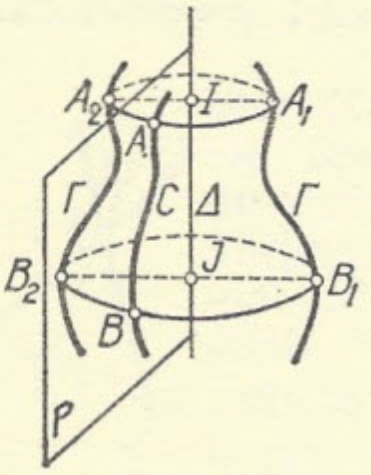


Fig. 148

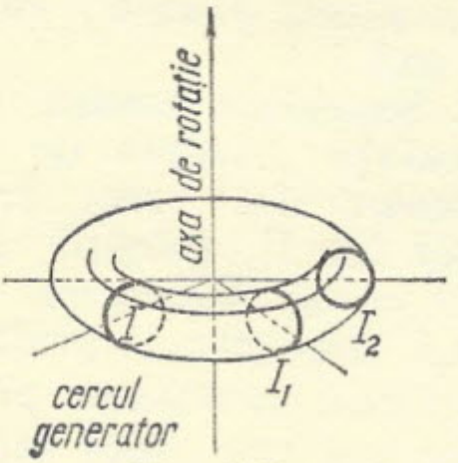


Fig. 149

perpendicular pe axă, al cărui centru descrie axa și se sprijină pe generatoare. Secțiunea unei suprafețe de rotație printr-un semiplan P care trece prin axă (și este mărginit de aceasta) este o curbă care se numește *curbă meridiană*. În particular *cilindrul* și *conul de rotație* sînt suprafețe născute din rotația unei drepte paralele sau concurente cu axa. Un cerc care se rotește în jurul unui diametru dă naștere unei sfere; dacă axa nu trece prin centrul cercului, suprafața născută se numește *tor* (fig. 149).

4. Sfera este locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix O numit *centru*; distanța de la un punct M al suprafeței la centru, se numește *rază* (fig. 169). Planul perpendicular în M pe OM se numește *plan tangent* la suprafață. Sfera împarte spațiul în trei regiuni: *puncte interioare, exterioare și punctele suprafeței*. O dreaptă poate fi *secantă* (cînd are două puncte comune cu sfera), *exterioară* (n-are nici un punct comun cu sfera), *tangentă* (are două puncte confundate cu sfera). Tangenta într-un punct M *(punctul de contact)* se află în planul tangent în acest punct la suprafață. Dintr-un punct M exterior unei sfere (fig. 150) se pot duce o infinitate de tangente la o sferă care for-

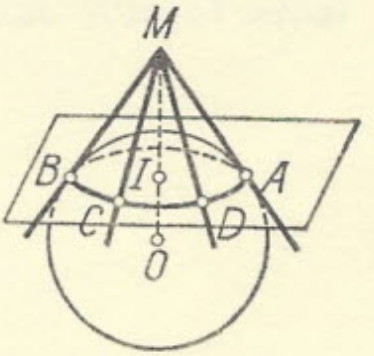


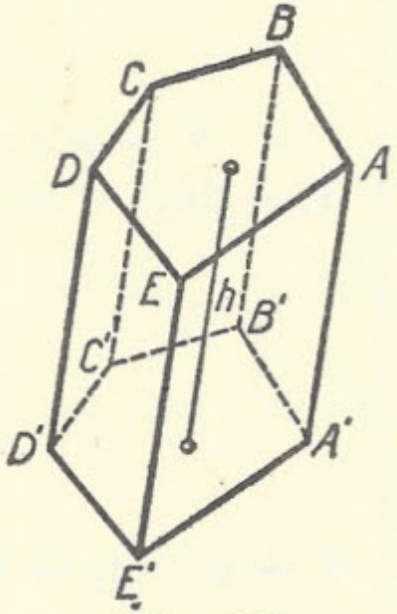
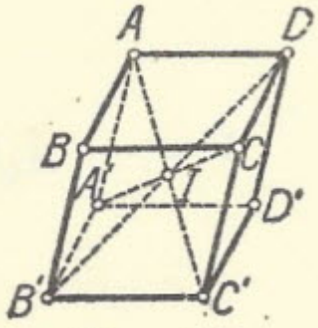
Fig. 150

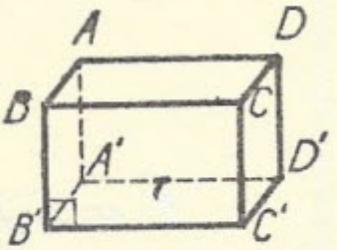
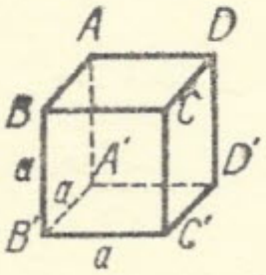
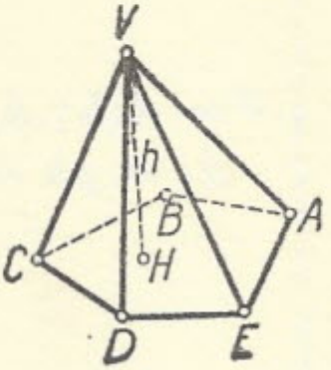
mează un con de rotație circumscris sferei. O dreaptă care taie o sferă, determină o *coardă* în ea care va fi cea mai mare cînd secanta trece prin centru și cînd se numește *diametru*. Un plan care taie o sferă, o taie după un cerc al cărui centru este piciorul perpendicularei coborîtă din centrul sferei pe planul secant. Acest cerc se numește *cerc mare* cînd planul secant trece prin centrul sferei.

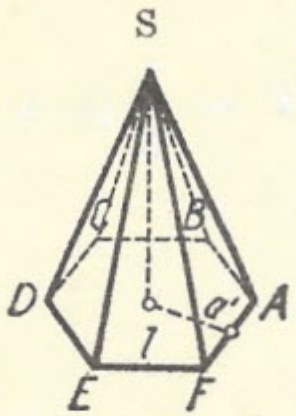
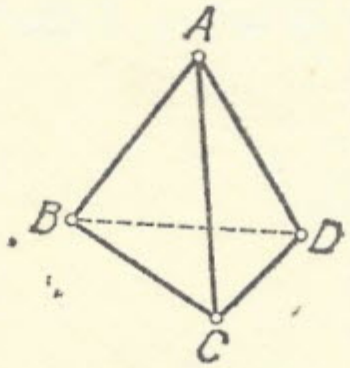
Patru puncte în spațiu, care nu sînt coplanare, determină o sferă care este circumscrisă tetraedrului format de punctele date.

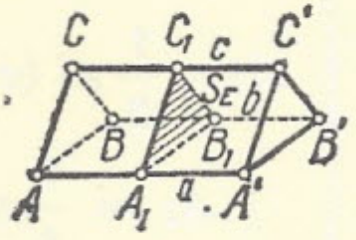
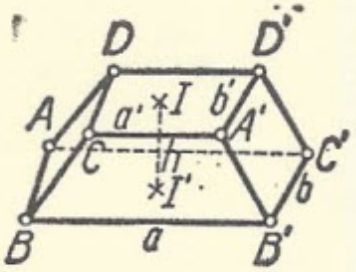
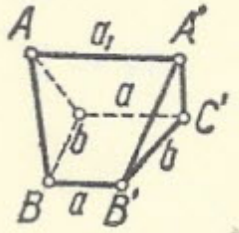
§ 5.4. Arii și volume

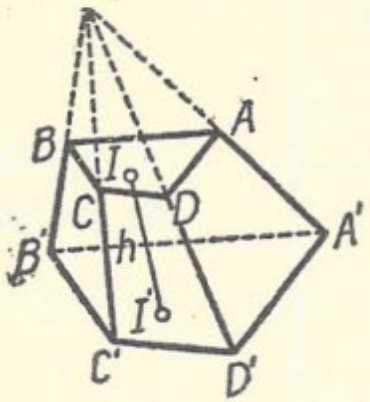
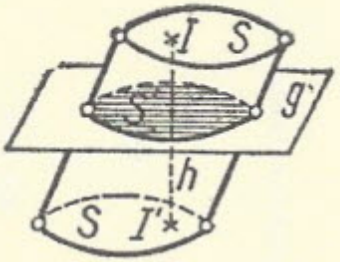
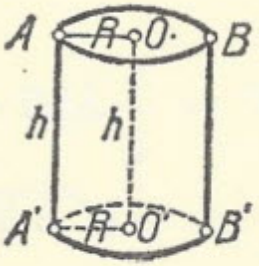
Notații: V = volumul corpului; A_l = aria laterală; A_t = aria totală; A_b = aria bazei; S = = aria secțiunii drepte; h = înălțimea; a = apotema fețelor laterale; g = generatoarea.

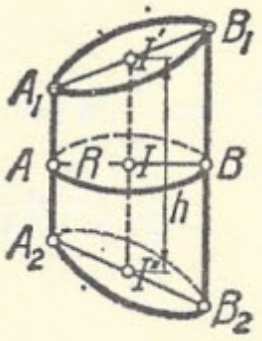
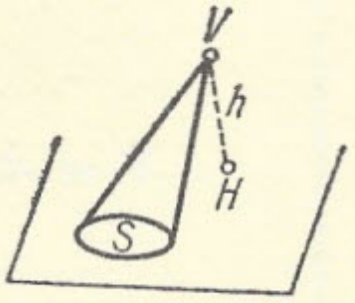
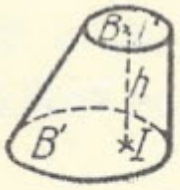
Corpul	Formula
Prisma	
 Fig. 151	$V = A_b h.$
Prisma dreaptă	
 Fig. 152	$V = A_b h$; $A_l = ph$; $A_t = ph + 2A_b$

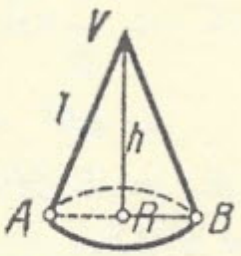
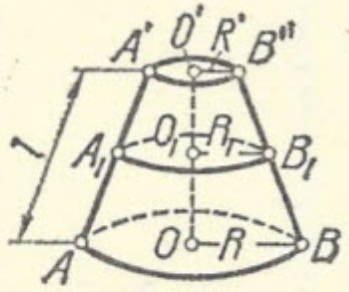
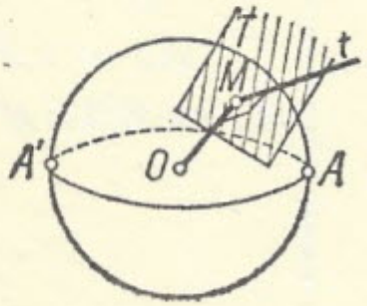
Corpul	Formula
Paralelipiped dreptunghic (a, b, c muchiile care se întîlnesc într-un vîrf)	
 Fig. 153	$V = abc;$ $A_l = 2(ab + bc + ca)$
Cubul cu latura a	
 Fig. 154	$V = a^3;\ A_l = 6\,a^2$
Piramida	
 Fig. 155	$V = \frac{1}{3} A_b h$

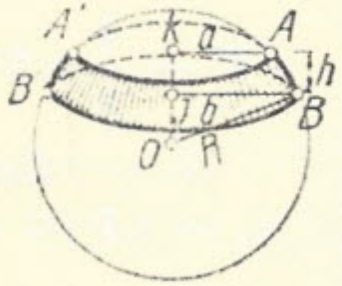
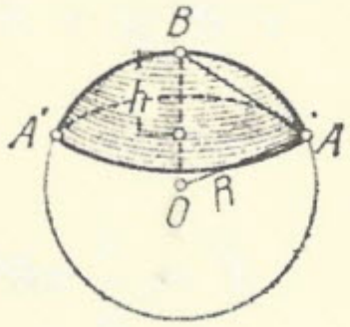
Corpul	Formula
Piramida regulată (l latura bazei, n numărul laturilor bazei, a' apotema bazei)  Fig. 156	$V_3 = \frac{1}{6} pa'h;$ $A_t = \frac{1}{2} nl\,(a + a')$ $A_l = \frac{1}{2} nla$
Tetraedru cu latura l  Fig. 157	$V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3,$ $A_t = \sqrt{3} l^2$

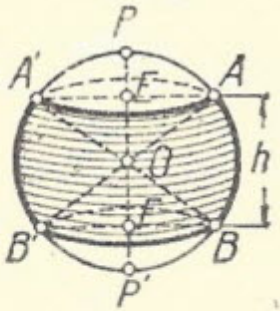
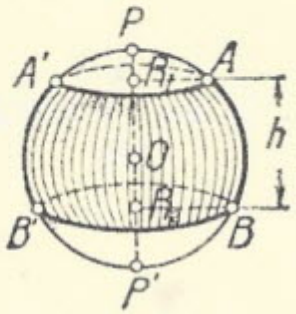
Corpul	Formula
Trunchi de prismă triunghiulară (a, b, c muchiile paralele)  Fig. 158	$V = \frac{1}{3}(a + b + c)S_{\perp}$
Trunchi de prismă patrulateră  Fig. 159	$V = \frac{1}{6}h\,[b\,(2a + a') + b'(2a' + a)]$
Pana  Fig. 160	$V = \frac{1}{6}bh\,(2a + a_1)$

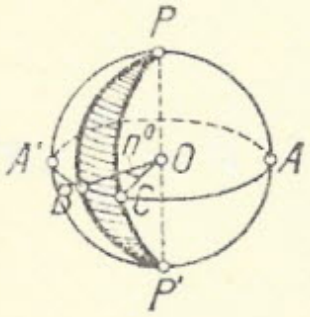
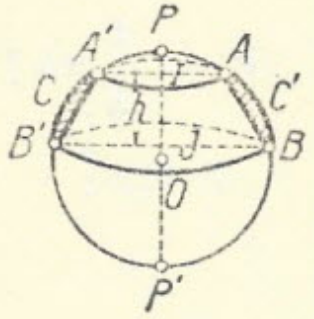
Corpul	Formula
Trunchi de piramidă (B, B' ariile bazelor)  Fig. 161	$V = \frac{1}{3} h(B + B' + \sqrt{BB'})$
Cilindrul  Fig. 162	$V = A_b h$
Cilindrul de rotaţie (R raza bazei)  Fig. 163	$V = \pi R^2 h,$ $A_l = 2\pi Rh,$ $A_l = 2\pi R(h + R)$

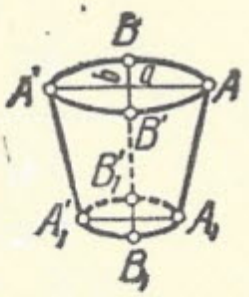
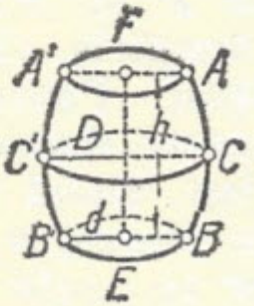
Corpul	Formula
Trunchi de cilindru de rotaţie (*R* raza secţiunii drepte)	
 Fig. 164	$V = \pi R^2 h$ $A_l = 2\pi R h.$
Conul	
 Fig. 165	$V = \frac{1}{3} A_b h$
Trunchi de con (*B*, *B'* suprafeţele bazelor)	
 Fig. 166	$V = \frac{1}{3} h(B + B' + \sqrt{BB'})$

Corpul	Formula
Conul de rotaţie (R raza bazei)  Fig. 167	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$ $A_l = \pi R g,$ $A_t = \pi R (R + g)$
Trunchi de con de rotaţie (R, R' razele celor două baze)  Fig. 168	$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + R'^2 + RR').$ $A_l = \pi g (R + R').$ $A_t = \pi [R(g + R) + R' (g + R')].$
Sfera de rază R  Fig. 169	$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$ $A_t = 4\pi R^2.$

Corpul	Formula
Zona sferică  Fig. 170	$V = \frac{1}{6}\pi h\,(3a^2 + 3b^2 + h^2)$. $A_l = 2\pi Rh$, $A_t = \pi(2Rh + a^2 + b^2)$.
calotă sferică  Fig. 171	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$, $A_l = \pi AB^2$. $A_t = \pi(2AB^2 - h^2)$.

Corpul	Formula
Sector sferic descris de sectorul AOB în rotație în jurul lui PP'.  Fig. 172	$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$
Segment sferic  Fig. 173	$V = \frac{1}{6}\pi h\,[h^2 + 3(R_1^2 + R_2^2)]$

Corpul	Formula
Fus sferic adică aria $PBP'CP$ ($BOC = n^\circ$ sau n^r)  Fig. 174	$V = \frac{R^3 n^\circ}{270} = \frac{2}{3} R^3 n^r.$ $A_l = \frac{\pi R^2 n^\circ}{90} = 2R^2 n^r.$
Inel sferic născut din rotația segmentului circular în jurul lui PP'  Fig. 175	$V = \frac{1}{6} \pi A B^2 h.$

Corpul	Formula
Găleata  Fig. 176	$V = \frac{1}{6}\pi h[2(ab + a_1b_1) + (ab_1 + a_1b)]$
oiul  Fig. 177	$V \sim \frac{\pi h}{15}\left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2\right)$

§ 5.5. Transformări geometrice

1. Simetria poate fi de trei feluri:

a) *Față de un punct O* (*centrul* de simetrie), simetricul unui punct M este un punct M' astfel ca punctele M, O, M' să fie coliniare și $OM = OM'$ (fig. 178).

b) *Față* de o axă Δ (axa de simetrie), simetricul unui punct M' astfel ca MM' să fie perpendiculară pe Δ și $MI = IM'$ (fig. 179).

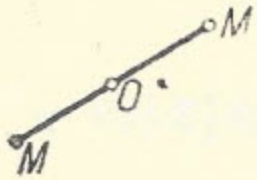


Fig. 178

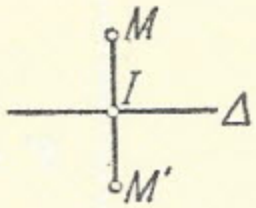


Fig. 179

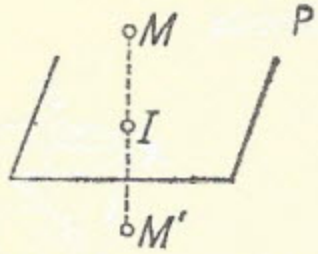


Fig. 180

c) *Față de un plan P* (*planul* de simetrie) simetricul unui punct M este un punct M' astfel ca MM' să fie perpendiculară pe P și $MI = IM'$ (fig. 180). Oricare ar fi această simetrie, simetricul simetricului este punctul inițial. Pentru acest motiv, punctele M, M' se numesc *simetrice* față de un punct, o axă sau un plan. Două figuri se zic că sînt *simetrice* față de un punct, o axă sau un plan, dacă între punctele lor se poate stabili o corespondență biunivocă astfel ca punctele corespunzătoare să fie simetrice în raport cu un punct, o axă sau un plan. De asemenea se zice că un punct o axă sau un plan este un *element* de simetrie al unei figuri dacă punctele ei sînt simetrice două cîte două față de un asemenea element.

Două figuri simetrice față de un punct sînt direct egale, iar două figuri simetrice față de o axă sau față de un plan, sînt invers egale.

2. Translația. Considerăm în spațiu o figură F formată din punctele A, B, C, ... (fig. 181). Dacă prin diferitele puncte ale figurii F ducem segmente paralele, egale și de același sens, punctele transformate A', B', C', ... formează o figură F' care

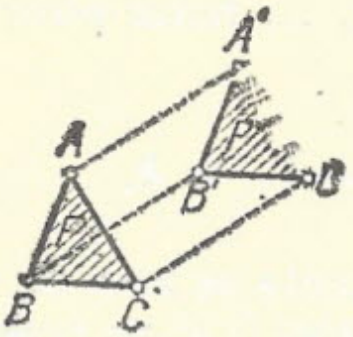


Fig. 181

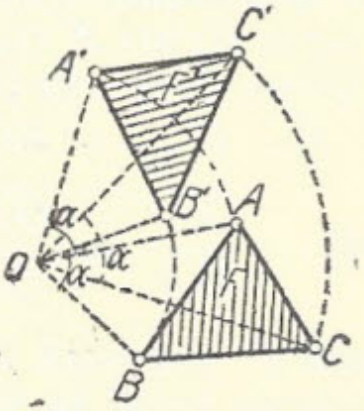


Fig. 182

se spune că se deduce din F printr-o *translație* de vector $\mathbf{a} = \overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \ldots$

Figurile F, F' sînt direct egale.

3. Rotația.

a) Dacă A, B, C, ..., punctele unei figuri plane F descriu arce egale de mărime α în același sens și cu același centru O din planul figurii F (fig. 182) pînă în pozițiile A', B', C'... care formează figura F', vom spune că F' se deduce din F printr-o *rotație de centru O și de amplitudine α*. Figura F se poate deduce din F' printr-o rotație de același centru și de amplitudine $-\alpha$. Simetria față de un punct O este o rotație de 180° față de O. Rotația unui cerc în jurul centrului său, este el însuși.

b) Rotația unei figuri în jurul unei axe în spațiu se face după explicația dată la § 5.3.3, oprindu-ne după descrierea unghiului α.

Două figuri F, F' rotite într-unul din modurile de mai sus sînt direct egale.

4. Omotetia. Dacă unim punctele A, B, C, ... ale unei figuri F (fig. 183) cu un punct O din spațiu și pe dreptele OA, OB, OC, ... luăm punctele A', B', C', ... astfel ca

$$(270) \qquad \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \ldots = k,$$

figura F' formată de aceste puncte se zice că este *omotetica* lui F în raport cu *centrul* O și cu *raportul* k *de omotetie*.

Figurile F, F' transformate prin omotetie sînt asemenea.

Construcția geometrică este dată în § 4.7.6.

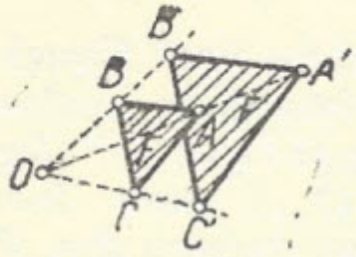


Fig. 183

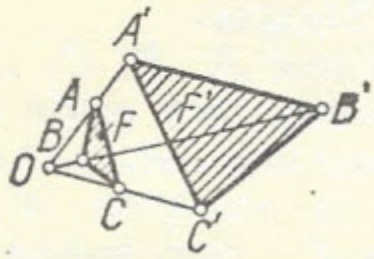


Fig. 184

5. Inversiunea. Dacă procedăm ca la omotetie, dar în loc de (270) luăm

$$(271) \quad \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = \ldots = k,$$

vom spune că figurile F, F' sînt *transformate prin inversiune*, sau că figura F' este *inversa* figurii F (fig. 184). O se numeşte *polul inversiunii* iar k *puterea de inversiune*. Construcţia geometrică este dată în § 4.7.15.

6. Simetria, translaţia şi rotaţia sînt *transformări* care păstrează lungimile. O succesiune de asemenea transformări, se zice că definesc o *deplasare*.

Simetria, translaţia, rotaţia, omotetia şi inversiunea sînt transformări care păstrează unghiurile. O succesiune de asemenea transformări se zice că definesc o *transformare conformă*.

Mulţimea formată din dreptele şi cercurile planului este transformată în ea însăşi printr-o transformare conformă.

6. GEOMETRIA ANALITICĂ PLANĂ

§ 6.1. Elemente de calcul vectorial

1. Vectori. Un *vector* este caracterizat prin *mărime* (sau *normă*), *direcţie* şi *sens*; poate fi reprezentat printr-un *segment* orientat (fig. 185). În această reprezentare vom numi: *A originea*, *B extremitatea*, Δ *suportul*; $AB = |\mathbf{a}|$ reprezintă mărimea vectorului, Δ dă direcţia vectorului iar sensul de la *A* la *B* reprezintă sensul vectorului. Dacă:

a) *A* este fix pe Δ, se zice că vectorul este *localizat*.

b) *A* oriunde pe Δ, vectorul este *alunecător*.

c) *A* oriunde în spaţiu, vectorul este *liber*. În geometria analitică se folosesc vectorii liberi. Cînd lucrăm cu vectori, vom numi numerele reale *scalari*.

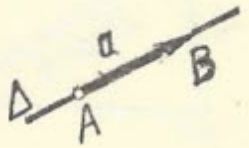


Fig. 185

Se numeşte *vector nul*, un vector a cărui lungime este nulă; vectorul nul are direcţia şi sensul nedeterminate.

Vectorul ma, unde m este un *scalar*, se zice că este *coliniar* cu **a**: are mărimea $|ma|$, același sens cu **a** dacă $m>0$ și sens contrar dacă $m<0$. În particular, $-\mathbf{a}$ se numește *opusul* lui **a** (fig. 186).

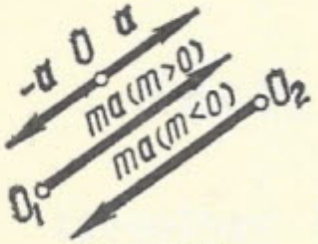


Fig. 186

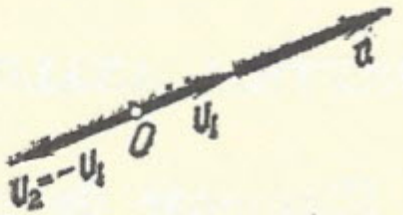


Fig. 187

Doi vectori coliniari au suporturile paralele (sau confundate). Un vector **u** pentru care $|\mathbf{u}| = 1$ se numește *versor* (sau *vector unitar*); o direcție are doi versori opuși (fig. 187). Dacă **u** este versorul unui vector **a**, atunci $\mathbf{a} = a\mathbf{u}$, unde a este valoarea algebrică a vectorului **a**. Doi vectori care au aceeași mărime, aceeași direcție și același sens se zice că sînt *echipolenți*.

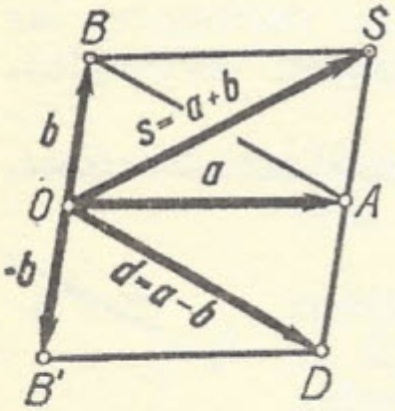


Fig. 188

2. Adunarea și scăderea vectorilor se face după regula paralelogramului analog ca la numere complexe (§ 3.4.2 b) (fig. 188). Dacă pe două axe Ox, Oy luăm cîte un versor **i**, **j**, atunci orice

vector din plan se va *descompune* după formula (fig. 189)

(272) $$\boxed{\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}}$$

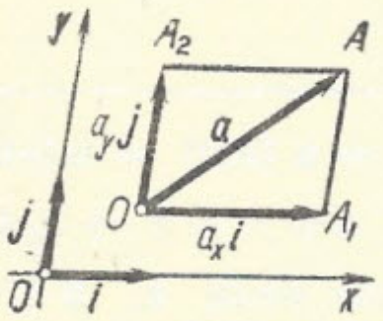


Fig. 189

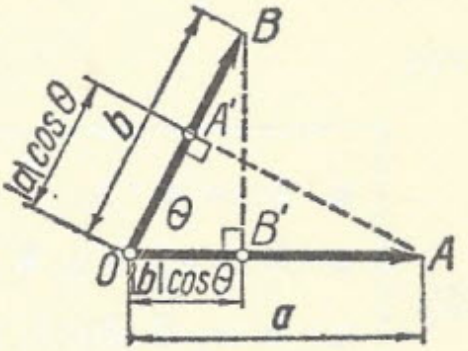


Fig. 190

unde a , a_y sînt doi scalari, $a\,\mathbf{i}$ și $a_y\mathbf{j}$ se numesc *componentele* lui $\mathbf{a}$ de-a lungul celor două axe. În particular, vectorul ce unește un punct $M(x, y)$ cu originea axelor, se numește *vector de poziție* al punctului M și are ca expresie

(273) $$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

3. Produs scalar a doi vectori se definește prin una din formulele (fig. 190)

(274) $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$$
$$= |\mathbf{a}|\,\overline{OB'} = |\mathbf{b}|\,\overline{OA'}.$$

În particular

(274′) $$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2,$$

şi în special

(274″) $$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{ij} = \cos\,(Ox,\ Oy).$$

Avem

(275)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}, \qquad (m\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}\,(m\mathbf{b}) = m(\mathbf{ab}),$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}, \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ dacă şi numai dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sînt perpendiculari (în ipoteza că nici unul din vectori nu este nul)

În particular, dacă axele sînt perpendiculare,

(276)

$$\mathbf{ij} = 0, \quad \cos\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2}},$$

unde b_x, b_y sînt definiţi printr-o formulă analogă cu (273).

4. Produsul vectorial (fig. 191) a doi vectori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ este tot un vector $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ care se bucură de proprietăţile:

a) $\mathbf{c}$ este perpendicular pe planul definit de suporturile vectorilor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi astfel ca un om cu picioarele pe planul $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ să aibă pe $\mathbf{a}$ la dreapta şi pe $\mathbf{b}$ la stînga;

b) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, adică $|\mathbf{c}|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ ca laturi. Avem proprietăţile:

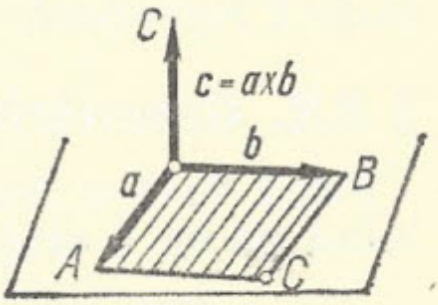


Fig. 191

(277)
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$
$$(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (m\mathbf{b}) = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ dacă şi numai dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sînt coliniari (presupunînd că nici unul din vectori nu este nul)

5. Spaţiu vectorial. Fie L un modul (§ 2.1.4) ale cărui elemente $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... le numim *vectori* şi un corp K (§ 2.1.6) ale cărui elemente m, n, p, ..., le numim *scalari*. Vom spune că L formează

un *spațiu vectorial* dacă pentru oricare $m \in K$, $\mathbf{a} \in L$, $m\mathbf{a} \in L$, operația $m\mathbf{a}$ satisfăcînd axiomele

$$(278)\quad m(n\mathbf{a}) = (mn)\mathbf{a},\quad m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b},$$
$$(m + n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a},\quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a},$$

unde 1 reprezintă elementul unitate din K.

§ 6.2. Geometria analitică a dreptei

Fiind dată o dreaptă, o transformăm într-o axă luînd pe ea o origine O, o unitate de măsură OV și un sens pozitiv de la O spre V (fig. 192). Dacă notăm cu x abscisa unui punct pe dreaptă, atunci avem

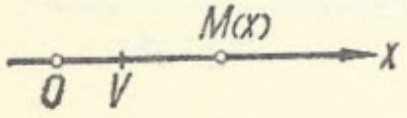
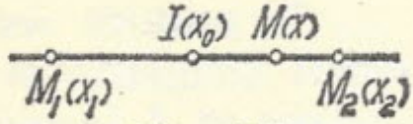


Fig. 192

T. 18.

Date	Formule
Punctele $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$	$M_1M_2 = \lvert x_2 - x_1 \rvert$; $\overline{M_1M_2} = x_2 - x_1$
Punctul M definit pe segmentul M_1M_2 prin $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -k$.  Fig. 193	$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$

Date	Formula
Mijlocul segmentului $I(x_0)$	$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$
Biraportul a patru puncte $M_i(x_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ este expresia $\frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} : \frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_4M_2}} = (M_1M_2M_3M_4) = R$	$R = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{u - w}{v - w}$ unde $u = x_1x_2 + x_3x_4$, $v = x_1x_3 + x_2x_4$, $w = x_1x_4 + x_2x_3$.
Biraportul se numește *armonic* atunci cînd $R = -1$.	$2(x_1x_2 + x_3x_4) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$

§ 6.3. Dreapta în plan

1. Raportăm planul la două axe Ox, Oy care fac între ele un unghi oarecare θ (fig. 194). După poziția lui $M(x, y)$, coordonatele vor avea semnele sau valorile

M	I	II	III	IV	Ox	Oy
x	+	−	−	+	±	0
y	+	+	−	−	0	±

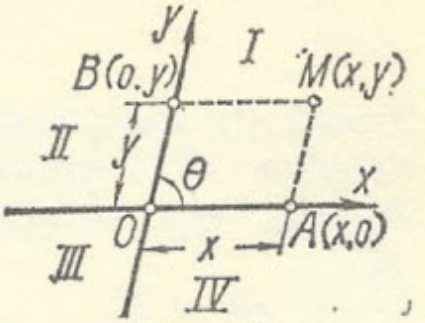
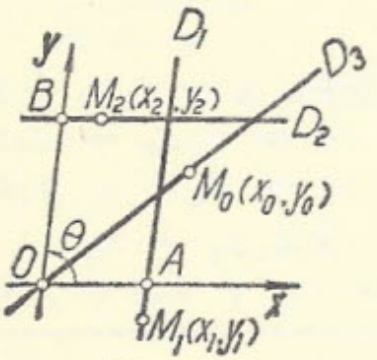


Fig. 194

2. Avem formulele

Date	Formule
Drepte aşezate particular faţă de axele de coordonate  Fig. 195	$x = a$ reprezintă o dreaptă paralelă cu Oy; dacă îi cunoaştem un punct $M_1(x_1, y_1)$, ecuaţia ei va fi $x = x_1$; $y = b$ reprezintă o dreaptă paralelă cu Ox; dacă îi cunoaştem un punct $M_2(x_2, y_2)$, ecuaţia ei va fi $y = y_2$; $y = mx$ (sau $ax + by = 0$) reprezintă o dreaptă care trece prin O; dacă trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$, ecuaţia ei va fi $y = (y_0/x_0)x$.
Ecuaţiile *parametrice* ale dreptei cînd cunoaştem; $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}} = -k$;	$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}$, $y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}$

Date	Formule
$M_0(x_0, y_0)$ mijlocul segmentului M_1M_2	$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

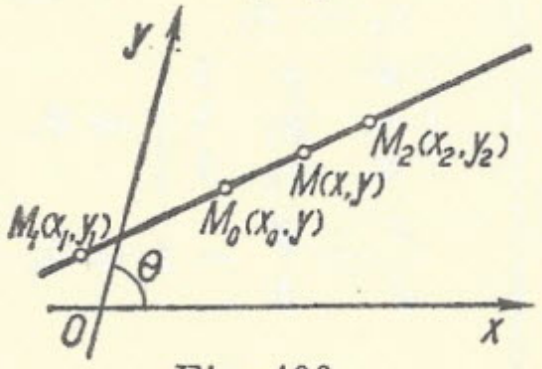


Fig. 196

Ecuaţiile *parametrice* ale dreptei cînd cunoaştem un punct $M_1(x_1, y_1)$ şi direcţia dreptei definită prin vectorul $\overline{OP}$, $P(a, b)$.	$x = x_1 + \lambda a$, $y = y_1 + \lambda b$, $\lambda \in R$, este un *parametru* care determină poziţia lui $M(x, y)$ pe dreaptă.

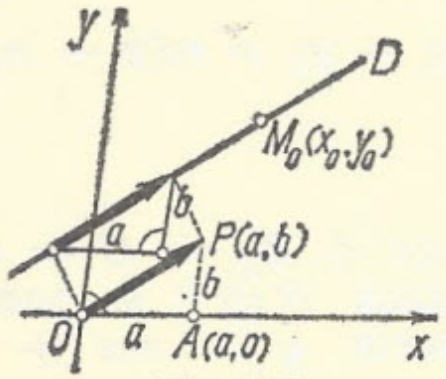
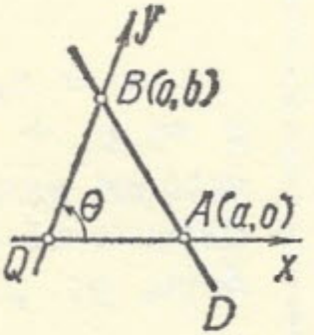


Fig. 197

Date	Formule
Ecuația *carteziană* a unei drepte cînd îi cunoaștem două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$; $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$
Ecuația dreptei definită prin *tăieturi* $A(a, 0)$, $B(0, b)$.	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$
 Fig. 198	
Ecuația dreptei definită printr-un punct $M_1(x_1, y_1)$ și *coeficientul unghiular* $m = b/a$.	$y - y_1 = m(x - x_1)$.
Ecuația generală a dreptei	$Ax + By + C = 0$; dacă $B \neq 0$ se poate scrie $y = mx + n$ $(m = -A/B)$.

Date	Formule
Ecuația unei drepte paralelă cu dreapta $D \equiv Ax + By + C = 0$	$D + \lambda = 0$, $\lambda \in R$, parametru care identifică dreapta.
Fascicul de drepte definit prin dreptele $D_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = 0$ $(i = 1, 2)$	$D_1 + \lambda D_2 = 0$, $\lambda \in R$, parametru care identifică dreapta în fascicul.
Condiția ca trei puncte $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ să fie *coliniare*	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$
Condiția ca trei drepte $D_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ să fie *concurente*	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$ sau $\lambda D_1 + \mu D_2 + \nu D_3 = 0.$

3. O dreaptă, definită prin ecuația generală împarte planul în trei regiuni după cum $Ax + By + C \lessgtr 0$. Pentru a determina regiunile este suficient să determinăm semnul primei părți pentru un punct particular al planului.

4. Două drepte sînt paralele dacă şi numai dacă au acelaşi coeficient unghiular, adică $m = m'$, iar dacă este scrisă sub forma generală, $A/B = A'/B'$.

Două drepte $D_i \equiv A_i x + B_i y + C_i = 0$ $(i = 1, 2)$ sînt confundate dacă şi numai dacă

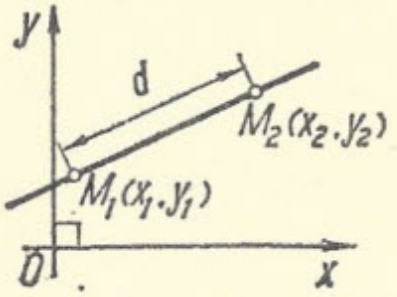
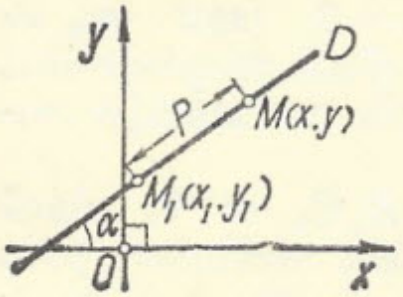
$$(279) \qquad D_1 \equiv \lambda D_2 \quad \text{sau} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

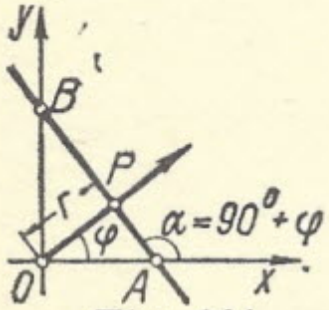
Observaţie. Toate formulele precedente sînt independente de unghiul θ al axelor de coordonate.

5. a) Dacă într-o problemă se cere să se arate că o anumită dreaptă, care depinde de un parametru (şi care formează o *familie* de drepte) rămîne paralelă cu o direcţie dată, va trebui să se arate că coeficientul unghiular al dreptei nu depinde de acest parametru.

b) În aceeaşi ordine de idei, dacă se cere să se arate că o dreaptă variabilă trece printr-un punct fix, va trebui să arătăm că ecuaţia ei este de forma $D_1 + \lambda D_2 = 0$, iar punctul fix se va găsi la intersecţia dreptelor $D_1 = 0$, $D_2 = 0$.

6. Toate formulele ce urmează scrise într-un sistem de axe oarecare, depind de θ; de aceea, pentru simplitate, vom lua axele *perpendiculare*, adică $\theta = 90°$.

Date	Formule
Distanța între două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$  Fig. 199	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
Reprezentarea parametrică a dreptei cînd cunoaștem un punct $M_1(x_1, y_1)$ și unghiul α pe care-l face cu direcția pozitivă a axei Ox  Fig. 200	$x = x_1 + \rho \cos \alpha,$ $y = y_1 + \rho \sin \alpha$ unde $\rho = \overline{M_1 M}.$

Date	Formule
Coeficientul unghiular (α definit la cazul precedent)	$m = \operatorname{tg} \alpha$
Ecuaţia normală a dreptei	$x \cos \varphi + y \sin \varphi - r = 0.$
 Fig. 201	
Unghiul ascuţit a două drepte avînd coeficienţii unghiulari m_1, m_2.	$\operatorname{tg} V = \left\| \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right\|,$ $\cos V = \dfrac{\lvert 1 + m_1 m_2 \rvert}{\sqrt{(1 + m_1^2)(1 + m_2^2)}}.$
Condiţia ca două drepte să fie perpendiculare	$m_1 m_2 + 1 = 0$ (sau $m_2 = -1/m_1$) dacă dreptele sînt definite prin coeficienţii unghiulari; $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$, dacă dreptele sînt definite prin ecuaţia $Ax + By + C = 0.$

Date	Formule
Distanța d_0 a unui punct $M_0(x_0, y_0)$ la o dreaptă	$d_0 = \lvert x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - r \rvert$ dacă dreapta este definită prin ecuația normală și $d_0 = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, dacă dreapta este definită prin $Ax + By + C = 0$.
Aria triunghiului format de punctele $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$	$S = \pm \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

7. Formulele

(280) $$\begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= y_0 + x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{aligned}$$

definesc o transformare de coordonate ale căror noi axe $O'x'y'$ se obțin din cele vechi prin translația originii în punctul O' (x_0, y_0) și o rotație de unghi θ (fig. 202).

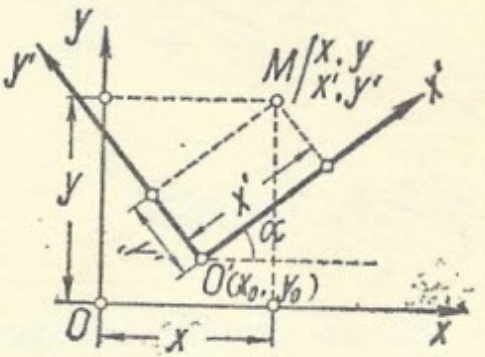


Fig. 202

8. Locuri geometrice.

a) Dacă locul geometric este definit printr-o relaţie metrică, atunci ecuaţia locului se obţine traducînd această relaţie prin formulele de mai sus (şi prin cele ce vor urma), într-o ecuaţie de forma $f(x, y) = 0$, care va fi ecuaţia locului.

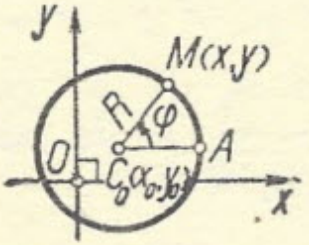
b) Dacă locul este definit prin intersecţia a două familii de curbe, care depind de un parametru, atunci ecuaţia locului se va obţine eliminînd parametrul între ecuaţiile lor. În particular, dacă din ecuaţiile celor două familii de curbe se poate obţine, prin combinaţii, o nouă ecuaţie care să nu depindă de parametru, aceasta va fi ecuaţia locului.

De exemplu, ecuaţiile bisectoarelor a două drepte care se intersectează $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, sînt

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

§ 6.4. Cercul

1. În toate formulele ce urmează, *axele sînt considerate perpendiculare.*

Date	Formule
Ecuaţia cercului cu centrul în punctul $C_0(x_0, y_0)$ şi de rază R.	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
 Fig. 203	
Ecuaţia cercului cu centrul în origine şi de rază R	$x^2 + y^2 = R^2$
Ecuaţia unui semicerc cu centrul în origine, de rază R, situat deasupra axei Ox	$y = \sqrt{R^2 - x^2}$
Cercul care are segmentul M_1M_2, $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2)$ ca diametru	$(x - x_1)(x - x_2) + (y-y_1)(y - y_2)=0.$
Ecuaţia generală a unui cerc	$\delta(x^2 + y^2) + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0;$ $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ se numeşte ecua-

Date	Formule
	ția *normală* a cercului. Coordonatele centrului sînt $(-a, -b)$ și raza $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
Reprezentarea *parametrică* a cercului cu centrul în punctul $C(x_0, y_0)$ și de rază R	$x = x_0 + R \cos \varphi$, $y = y_0 + R \sin \varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi)$
Ecuația cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$, $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$	$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$
Condiția ca patru puncte $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ să fie conciclice	Se obține din ecuația precedentă înlocuind $x = x_4$, $y = y_4$.
Puterea punctului $M_0(x_0, y_0)$ (§ 4. 2. 6) față de cercul avînd ecuația normală	$p_{M_0} = x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c$
Axa radicală a două cercuri date prin ecuațiile normale	$2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2) = 0$

Date	Formule
Condiția ca două cercuri definite prin ecuațiile normale să fie *ortogonale* (§ 4.2.5 a)	$2(a_1a_2 + b_1b_2) = c_1 + c_2$.
Tangenta într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ de pe cercul $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Prin polara unui punct față de un cerc se înțelege locul punctelor $M'(x', y')$ astfel ca $(M, M', M_1', M_1'') = -1$ (fig. 204).	$x_0x + y_0y + a(x + x_0) + b(y + y_0) + c = 0$ cu condiția $x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c = 0$.
Cînd M_0 este exterior cercului, polara este dreapta ce unește punctele de tangență ale tangentelor duse din M_0 la cerc.	Dacă această condiție nu are loc, ecuația reprezintă *polara* lui M_0 față de cerc

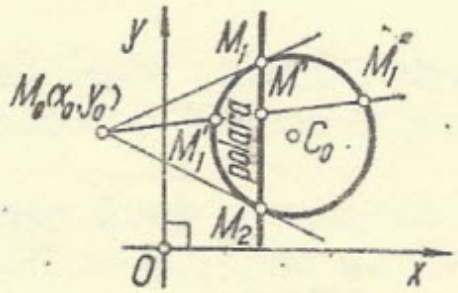
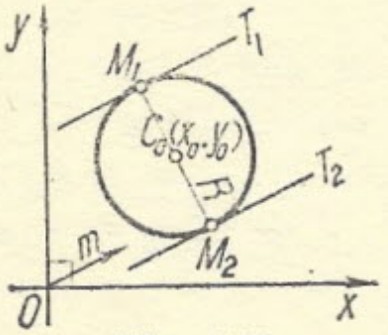


Fig. 204

Date	Formule
Ecuaţia tangentelor paralele cu direcţia de coeficient unghiular m la cercul cu centrul în punctul $C(x_0, y_0)$ şi de rază R.	$y - y_0 = m(x - x_0) \pm \pm R\sqrt{1 + m^2}$
 Fig. 205	
Ecuaţiile tangentelor duse din $M_0(x_0, y_0)$ la cercul (fig. 204)	$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-x_0y_0 \pm R\sqrt{x_0^2+y_0^2-R^2}}{R^2 - x_0^2}$

2. Pentru a găsi punctele comune unei drepte cu un cerc, se rezolvă sistemul format de ecuaţiile dreptei şi cercului.

Pentru a găsi punctele comune a două cercuri, se rezolvă sistemul format de ecuaţia unuia din cercuri şi ecuaţia axei lor radicale.

§ 6.5. Conice

În toate formulele ce urmează, axele sînt considerate perpendiculare.

1. Elipsa (fig. 206). Fiind date două puncte fixe $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$, numite *focare*, locul punctelor din plan pentru care

$$MF + MF' = 2a \tag{281}$$

este o curbă numită *elipsă* a cărei *ecuație canonică* raportată la axele din figură este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (b^2 = a^2 - c^2). \tag{281'}$$

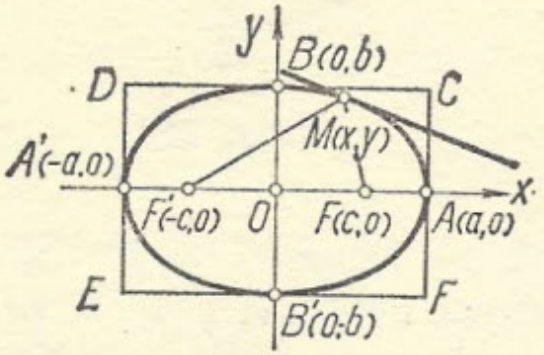


Fig. 206

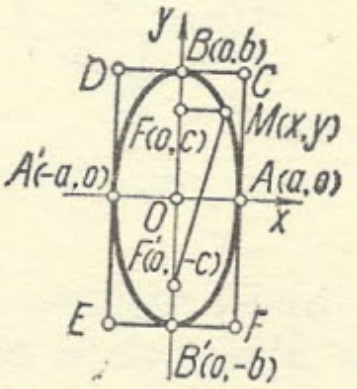


Fig. 207

$FF' = 2c =$ *distanța focală*, $AA' = 2a =$ *axa mare*, $BB' = 2b =$ *axa mică*; $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ *vîrfurile*, O *centrul* curbei, MF, MF' *raze vectoare*. Dacă $a<b$, focarele curbei sînt pe Oy și curba are forma din (fig. 207) iar $a^2 = b^2 - c^2$. Dacă $a = b$, elipsa este un cerc.

Construcția elipsei.

a) Se consideră o ață de lungime $2a+2c$ legată la capete (fig. 208); se fixează în F și F' două ace, se trece ața după ele și se întinde cu creionul în M care descrie elipsa *(construcția grădinarului)*.

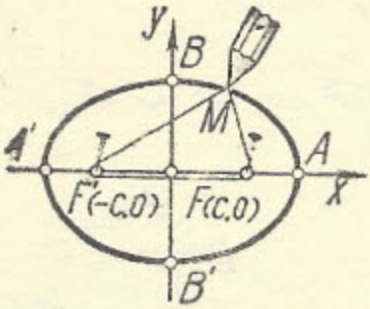


Fig. 208

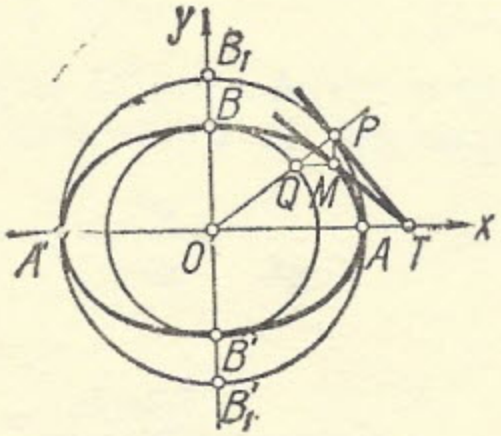


Fig. 209

b) Pe segmentele $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ (fig. 209) ca diametre se construiesc cercuri; prin O se duce o secantă variabilă care le taie în P și Q. Paralela prin P la Oy, cu paralela prin Q la Ox, se întîlnesc în M, ca în cazul în care secanta se rotește în jurul lui O, descrie elipsa de axe AA', BB'. Dacă în P ducem tangenta la primul cerc care taie pe AA' în T, dreapta MT este tangentă în M la elipsă.

2. Hiperbola (fig. 210). Vom folosi aceleaşi numiri şi notaţii ca la elipsă. Hiperbola este definită prin relaţia

$$|MF' - MF| = 2a \tag{282}$$

şi este o curbă a cărei *ecuaţie canonică*, raportată la axele de pe figură, este

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{282'}$$

$$(b^2 = c^2 - a^2)$$

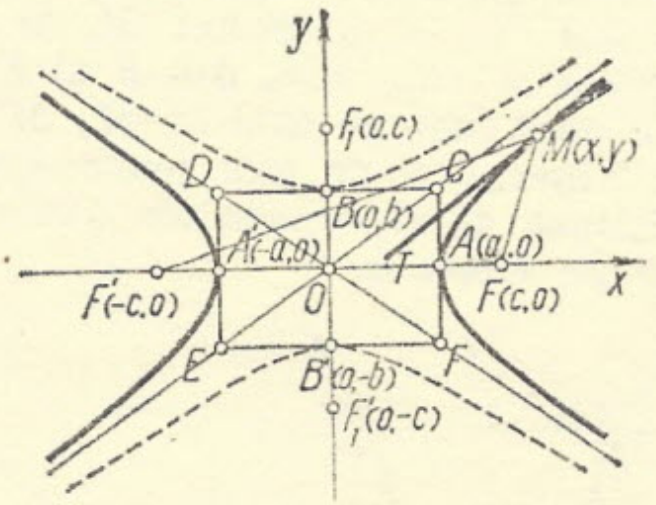


Fig. 210

şi are *două vîrfuri* $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$. Dacă $a = b$, hiperbola se numeşte *echilateră* şi are ecuaţia

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{282''}$$

Hiperbola are două *asimptote* (§ 7.6.13) cu ecuaţiile

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ sau } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0. \tag{283}$$

Curba de ecuaţie

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{282''}$$

reprezintă tot o hiperbolă care se numește *hiperbola conjugată* (282′); are vîrfurile $B(0, b)$, $B'(0, -b)$ iar focarele $F_1(0, c)$, $F_1'(0, -c)$; este arătată pe figură punctat.

Construcția hiperbolei (fig. 211). Pe prelungirea lui AA' se ia un punct M_0 și cu deschiderile de compas $A'M_0$, AM_0 din F și F' ca centre ce descriu arce care se taie în M, M', M'', M''' puncte ale hiperbolei cu axa mare AA' și focare F, F'.

Elipsa și hiperbola au axele de coordonate ca *axe de simetrie*.

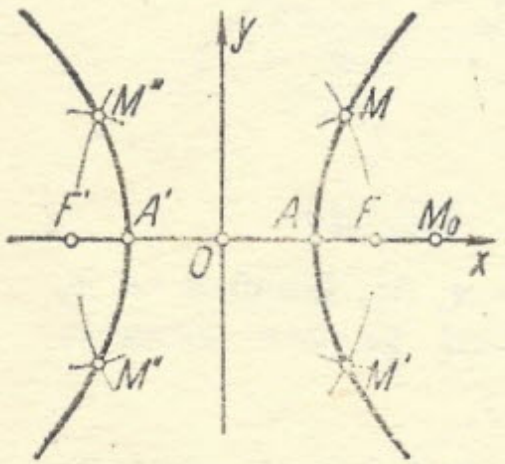


Fig. 211

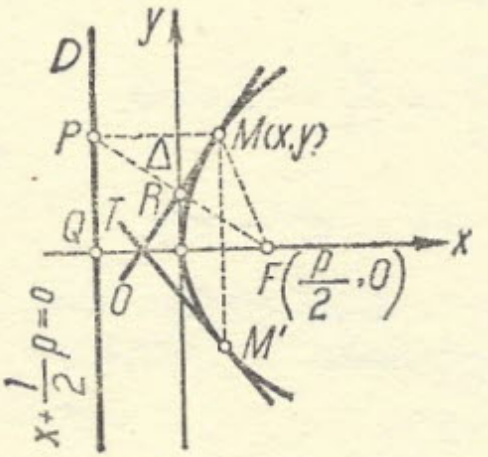


Fig. 212

3. Parabola (fig. 212). Fiind dat un punct fix F numit *focar* și o dreaptă fixă D numită *directoare*, locul punctelor egal depărtate de focar și de directoare este o curbă numită *parabolă* a cărei ecuație canonică este

$$y^2 = 2px, \qquad (284)$$

axa Ox fiind perpendiculara coborîtă din F pe D iar Oy paralela la D dusă prin mijlocul segmentului FQ; față de aceste axe $F\left(\frac{1}{2}p,\ 0\right)$ iar directoarea are ecuația (284) $x + \frac{1}{2}p = 0$. Parabola are o singură *axă*, care este axă de simetrie pentru curbă și nu are centru; O se numește vîrful parabolei și Oy este tangenta în O la curbă.

Construcția parabolei. Prin F se duce o dreaptă arbitrară Δ care taie pe D în P iar pe Oy în R; perpendiculara în P pe D cu perpendiculara în R pe Δ se taie în M, care este un punct al parabolei cu tangenta MR.

4. Proprietățile conicelor.

a) Cele trei curbe descrise mai sus se numesc *conice* sau *curbe de gr. 2;* afară de ele, o curbă de gr. 2 mai poate fi formată de ansamblul a două drepte a căror ecuație este de forma

$$(Ax + By + C)(A'x + B'y + C') = 0.$$

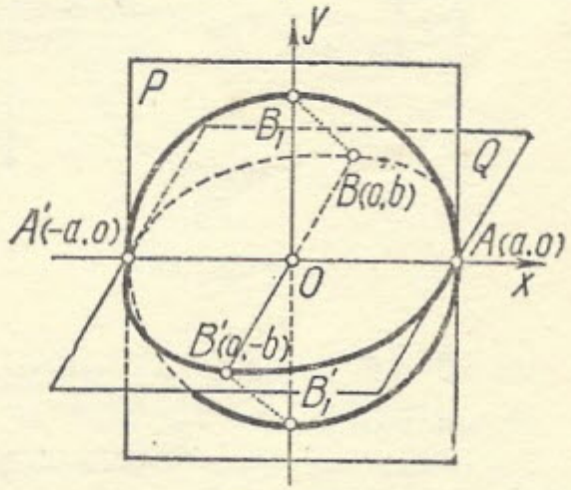


Fig. 213

b) Dacă într-un plan P (fig. 213) considerăm un cerc cu centrul în O și de rază a, pe

care-l proiectăm pe un plan Q care face cu primul plan un unghi θ definit prin relaţia $\cos \theta = b/a$, se obţine o elipsă de axe $2a$. $2b$ construite pe figură.

c) O dreaptă taie o conică în două puncte reale, imaginare sau confundate, după cum este *secantă*, *exterioară* sau *tangentă*; coordonatele lor se obţin rezolvînd sistemul format cu ecuaţiile celor două curbe.

d) *Proprietatea optică* a conicelor. Tangenta într-un punct M al unei elipse este bisectoarea exterioară a razelor vectoare (fig. 206); în cazul hiperbolei este bisectoarea interioară (fig. 210) iar în cazul parabolei este bisectoarea dreptelor MF, MP (fig. 212).

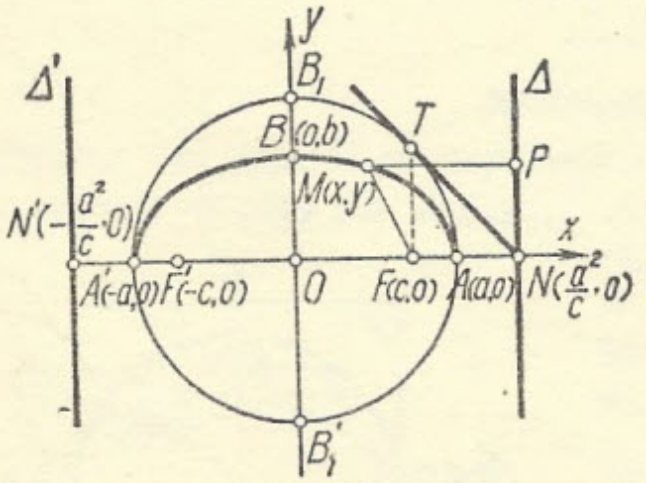


Fig. 214

e) Se numeşte *cerc principal*, cercul de diametru AA' pentru elipsă şi hiperbolă.

f) *Directoarele* elipsei (fig. 214) se obţin prin următoarea construcţie: în F se ridică perpendiculara FT pe AA', în T se duce tangenta la cercul principal care taie pe AA' în $N(a^2/c, 0)$. Directoarea Δ este perpendiculara în N pe AA'; o a doua directoare Δ' este sime-

trica acesteia față de centrul curbei și se referă la focarul F'. Pentru hiperbolă, din F se duc tangente la cercul principal (fig. 215) și dreapta care unește punctele de contact, paralelă cu Oy, este una din directoarele hiperbolei, avînd aceeași ecuație ca la elipsă; simetrica ei față de O este de asemenea directoare provenită din focarul F'.

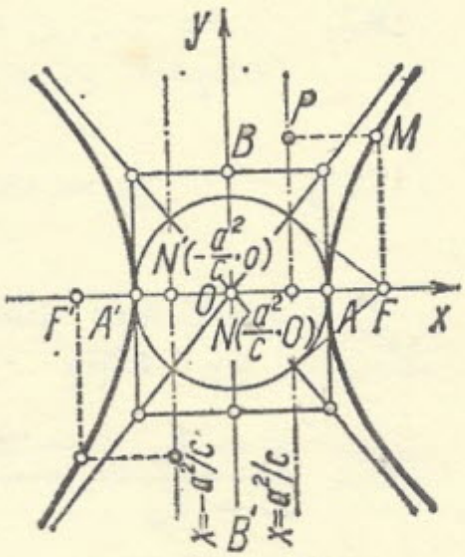


Fig. 215

g) *Excentricitate*. Dacă M este un punct al unei elipse sau al unei hiperbole și dacă coborîm o perpendiculară MP pe una din directoare, vom avea

$$(285)\qquad \frac{MF}{MP} = \frac{c}{a} = e,$$

F fiind focarul cu care s-a construit directoarea corespunzătoare. Constanta e se numește *excentricitatea* curbei; dacă curba este elipsă $e<1$, iar dacă este hiperbolă $e>1$ (evident $e = 1$ dacă curba este parabolă).

h) Dacă $M_0(x_0, y_0)$ este un punct al unei conice, atunci ecuația tangentei în acest punct este

$$(286)\ \frac{x_0x}{a^2} + \varepsilon\frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0;\ \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \varepsilon\frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,\ \varepsilon = \pm 1\right).$$

(286′) $y_0 y = p(x + x_0)$ $(y_0^2 = 2px_0)$.

i) *Ecuațiile tangentelor paralele cu o direcție dată* sînt

(287) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + \varepsilon b^2}$ ($\varepsilon = 1$ pentru elipsă și $\varepsilon = -1$ pentru hiperbolă).

(287′) $y = mx + \frac{p}{2m}$ (parabolă).

j) *Tangentele duse dintr-un punct exterior* $M_0(x_0, y_0)$ sînt

(288) $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{-x_0y_0 \pm \sqrt{\varepsilon b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - \varepsilon a^2b^2}}{a^2 - x_0^2}$$

($\varepsilon = 1$ pentru elipsă, $\varepsilon = -1$ pentru hiperbolă).

(288′) $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4px_0}}{2x_0}$$ (parabolă).

k) Avem *reprezentările parametrice*

(289) $x = a \cos t$; $y = b \sin t$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$ (elipsă).

(289′) $$x = a\frac{1 - u^2}{1 + u^2}; \quad y = \frac{2bu}{1 + u^2}$$ $(u \in R)$ (elipsă).

(290) $x = \dfrac{a}{\cos t}$; $y = b \operatorname{tg} t \; (0 \leqslant t < 2\pi)$
(hiperbolă).

(290′) $x = a\dfrac{1+u^2}{1-u^2}$; $y = \dfrac{2bu}{1-u^2}$ $(u \in R)$
(hiperbolă).

(291) $x = \dfrac{u^2}{2p}$; $y = u$ (parabolă).

l) Ecuația

(292) $$xy = m^2$$

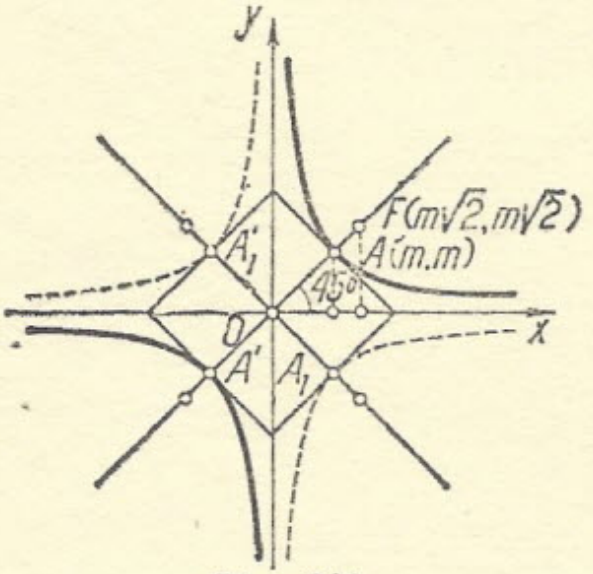


Fig. 216

reprezintă o hiperbolă echilateră raportată la asimptotele sale luate ca axe de coordonate (fig. 216). Axele sînt bisectoarele axelor de coordonat

și are semiaxele egale cu $m\sqrt{2}$ iar distanța focală $2m$. Hiperbola echilateră conjugată este arătată punctat pe figură și are ecuația

(292′) $$xy = -m^2.$$

Dacă $M_0(x_0, y_0)$ se află pe una din curbele (292), (292′), atunci ecuația tangentei în acest punct este

(293) $$y_0x + x_0y = 2\varepsilon m^2 \quad (x_0y_0 = \varepsilon m^2, \quad \varepsilon = \pm 1).$$

7. ANALIZĂ MATEMATICĂ

§ 7.1*. Funcții. Șiruri

1. Fiind date două mulțimi X și Y, se zice că am definit o *funcție (aplicație, operație)* pe X în Y, dacă unui element $x \in X$ facem să-i corespundă un element $y \in Y$. Vom nota $y = f(x)$ (sau $f: X \to Y$, sau $X \xrightarrow{f} Y$); x se numește *variabilă* sau *argument*, y *valoarea funcției*, X *mulțimea de definiție*, Y *mulțime valorilor funcției*. Se spune despre o funcție ... te: a) *surjectivă* dacă $f(X) = Y$ (această notație spune că mulțimea tuturor valorilor $f(x)$ cînd $x \in X$ se confundă cu Y).

b) *injectivă dacă relația* $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2 (\forall x_1, x_2 \in X)$.

... *jectivă* sau *biunivocă* dacă în același timp ... surjectivă și injectivă.

Definiția noțiunii de funcție presupune că la ... valoare $x \in X$, corespunde o *singură* valoare

*) În § 7.1–7.6 se consideră numai șiruri de numere și funcții cu valori reale.

pentru $f(x)$; acest fapt se mai exprimă spunînd că funcţia este *uniformă*.*)

Dacă $X \subset R$ şi $Y \subset R$, atunci vom spune că $f(x)$ este *funcţie reală de variabilă reală*. Mulţimea $[x, f(x)] \in R \times R$ se numeşte *graficul* funcţiei şi se obişnuieşte să se reprezinte printr-un arc de curbă, atunci cînd este posibil (fig. 217).

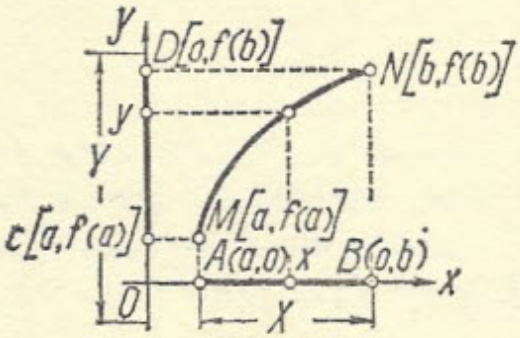


Fig. 217

2. Se numeşte *şir infinit*, o funcţie $a(n) = a$, definită pe şirul numerelor naturale $n \in N$. Vom scrie dezvoltat un şir sub forma

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad (294)$$

şi vom numi a_n *termenul general* al şirului.

3. Dacă X_1 este o submulţime a lui X ($X_1 \subset X$), funcţia $f_1(x) = f_1$, definită pe X_1 şi egală cu f pe această submulţime, se numeşte *restricţia* lui f la X_1; invers, f se numeşte *prelungirea* lui f_1 pe X. De exemplu funcţia $f_1 = \sin x$ definită pe cercul trigonometric este restricţia funcţiei $f = \sin x$ pentru orice $x \in R$. Analog pentru celelalte funcţii trigonometrice.

Mulţimea valorilor unei variabile reale se numeşte *interval*; intervalul $a < x < b$ sau (a, b),

* Se foloseşte uneori şi noţiunea de *funcţie multiformă* pentru a exprima că o funcţie are mai multe valori pentru orice $x \in X$.

se zice că este *deschis*, iar $a \leqslant x \leqslant b$, sau $[a, b]$ se zice că este *închis*. Un interval poate fi închis numai la stînga $[a, b)$ sau numai la dreapta $(a, b]$. Mulţimea $x > a$ reprezintă intervalul $(a, +\infty)$ iar $x < a$ reprezintă intervalul $(-\infty, a)$.

Vom numi *vecinătatea* unui număr a, orice interval care-l conţine pe a, de exemplu toate valorile lui x care satisfac inegalitatea $|x - a| < \delta$, adică intervalul $(a - \delta, a + \delta)$ (interval simetric).

4. Vom spune despre o funcţie $f(x)$ că este *strict monotonă* în (a, b) dacă atunci cînd x creşte, $f(x)$ creşte (strict crescătoare (v. fig. 217)) sau descreşte (strict descrescătoare, fig. 218) adică

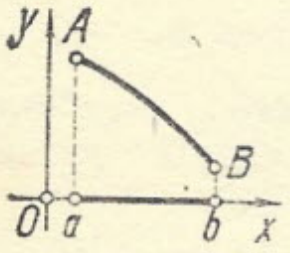


Fig. 218

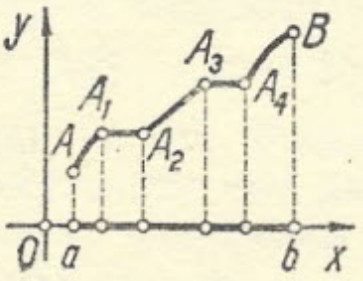


Fig. 219

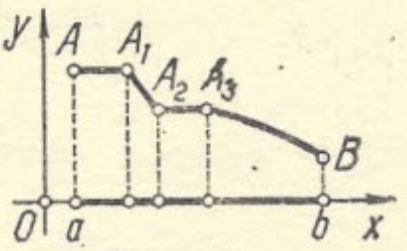


Fig. 220

(295) $a < x_1 < x_2 < b$, $f(x_1) < f(x_2)$ sau $f(x_1) > f(x_2)$ oricare ar fi x_1 şi x_2. Dacă

(296) $a < x_1 < x_2 < b$, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ funcţia este *crescătoare* (fig. 219).

$f(x_1) \geqslant f(x_2)$ funcţia este *descrescătoare* (fig. 220). De exemplu un şir a_n este *strict crescător* cînd $a_n < a_{+1}$ şi *strict descrescător* cînd $a_n > a_{n+1}$; este *crescător* cînd $a_n \leqslant a_{n+1}$ şi *descrescător* cînd $a_n \geqslant a_{n+1}$.

5. Se zice că o funcţie este *mărginită* într-un interval (a, b) cînd există două numere m, M astfel ca oricare ar fi $a < x < b$, să avem

$$m < f(x) < M.$$

Se zice că un şir a_n este *mărginit* cînd putem determina două numere m, M astfel ca, oricare ar fi n,

$$m < a_n < M.$$

În caz contrar funcţia sau şirul se numesc *nemărginite*.

6. Fie $y = f(x)$ o funcţie bijectivă cînd $x \in X$, $y \in Y$. Se numeşte *inversa* funcţiei f şi se notează cu f^{-1} funcţia care satisface relaţiile

$$f^{-1}[f(x)] = x, \quad f[f^{-1}(x)] = x. \tag{297}$$

Orice funcţie bijectivă are o inversă. Graficul unei funcţii inverse este simetric faţă de prima bisectoare (fig. 221).

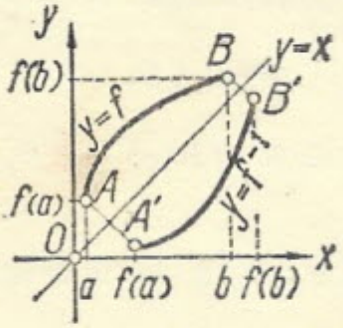
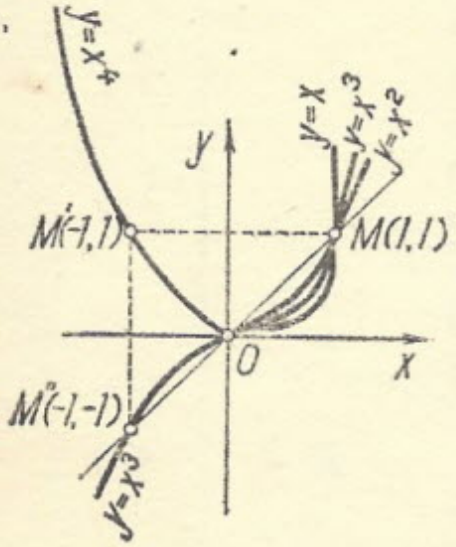


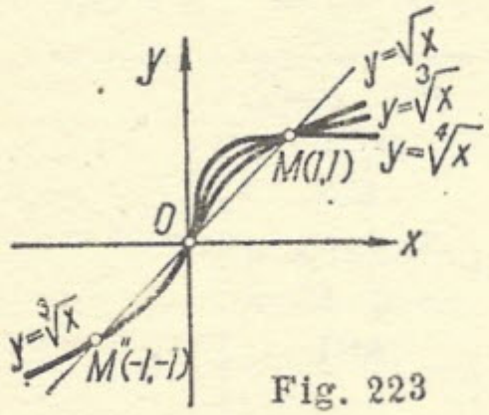
Fig. 221

7. Fie f o funcţie definită pe o mulţime X cu valori în mulţimea Y şi o altă funcţie g definită pe Y cu valori într-o mulţime Z. Atunci funcţia

$$z = g[f(x)] = (g \circ f)(x) \tag{298}$$

definită pe X cu valori în Z o vom numi *funcţie compusă*. În cazul (297), funcţia $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}$ este funcţia identitate.

Funcţia	X mulţimea de definiţie	Y mulţimea valorilor funcţiei	Proprietăţi
$f(x) = x^n$ $(n \in N)$  Fig. 222	R	R^+ dacă n este cu soţ R dacă n este fără soţ	§ 1.4
$f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(2 \leqslant n \in (N)$	R^+ dacă n este cu soţ R dacă n este fără soţ	R^+ R	§ 1.4
$f(x) = P(x)$, P polinom	R	R	§ 1.2

Funcția	X mulțimea de definiție	Y mulțimea valorilor funcției	Proprietăți
 Fig. 223			
$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, P și Q polinoame; $f(x)$ se numește *fracție rațională* (Q nu divide pe P)	$R-\{x_1,\ldots,x_m\}$, x_i fiind rădăcinile reale ale ecuației $Q(x)=0$	R	§ 1.2
$y=\sin x$ (fig. 10)	R	$[-1,+1]$	§ 3.1.2
$y=\cos x$ (fig. 11)	R	$[-1,+1]$	§ 3.1.2
$y=\operatorname{tg} x$ (fig. 12)	$R-\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}_{k\in N}$	R	§ 3.1.2

T. 22 (continuare).

Funcția	X mulțimea de definiție	Y mulțimea valorilor funcției	Proprietăți
$y = \operatorname{cotg} x$ (fig. 13)	$R - \{k\pi\}$ $k \in N$	R	§ 3.1.2
$y = \arcsin x$ (fig. 14)	$[-1, +1]$	$\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$	§ 3.1.3
$y = \arccos x$ (fig. 17)	$[-1, +1]$	$[\pi, 0]$	§ 3.1.3
$y = \operatorname{arctg} x$ (fig. 19)	R	$\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\right]$	§ 3.1.3
$y = \operatorname{arccotg} x$	R	$[\pi, 0]$	§ 3.1.3
$y = a^x$ $(0 < a < 1)$; în particular $y = (1/e)^x = e^{-x}$ (§ 2.5); are tabloul de variație x | $-\infty$ 0 1 $+\infty$ a^x | $+\infty \searrow 1 \searrow a \searrow 0$	R	$R^+ - \{0\}$	funcția este strict descrescătoare

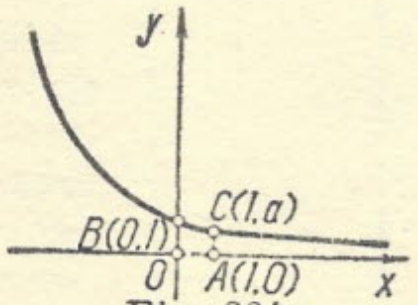
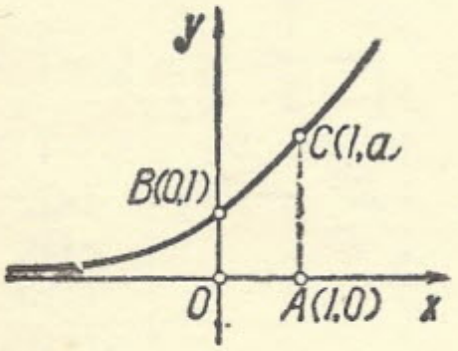
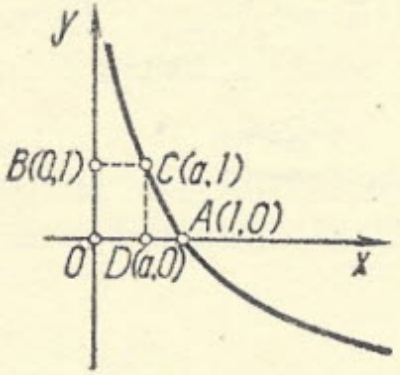
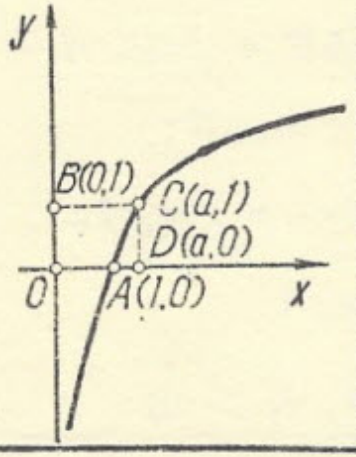


Fig. 224

Funcția	X mulțimea de definiție	Y mulțimea valorilor funcției	Proprietăți
$y = a^x$ $(a>1)$; în particular $y = e^x$ (§ 2.5); are tabloul de variație $\begin{array}{c\|c} x & -\infty \quad 0 \quad 1 \quad +\infty \\ \hline a^x & 0 \nearrow 1 \nearrow a \nearrow +\infty \end{array}$  Fig. 225	R	$R^+ - \{0\}$	Funcția este strict crescătoare
$y = \log_a x$ $(0<a<1)$ (§ 2.5) are tabloul de variație $\begin{array}{c\|c} \text{ol } x & 0 \quad a \quad 1 \quad +\infty \\ \hline \text{g} & +\infty \searrow 1 \searrow 0 \searrow -\infty \end{array}$	$R^+ - \{0\}$	R	Funcția este strict descrescătoare

T. 22 (continuare).

Funcţia	*X* mulţimea de definiţie	*Y* mulţimea valorilor funcţiei	Proprietăţi
 Fig. 226			
$y = \log_a x$ $(a > 1)$; în particular $y = \ln x$ (§ 2.5); are tabloul de variaţie x | 0 1 a $+\infty$ $\log_a x$ | $-\infty \nearrow 0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$  Fig. 227	$R^+ - \{0\}$	$\boldsymbol{R}$	Funcţia este strict crescătoare

1. Proprietățile logaritmilor.

a) Logaritmii în baza 10 se numesc *vulgari* sau *zecimali* și se notează cu lg; logaritmii în baza e se numesc *naturali* și se notează cu ln. În general, logaritmii în baza a se notează cu $\log_a$. Trecerea de la baza a la baza b se face prin formula

$$\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a, \tag{299}$$

$\log_b a$ se numește *modulul* transformării. În particular, $\lg e = 0{,}43429\ldots$, $\ln 10 = 2{,}30259\ldots$ Avem în general $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

b) Avem

$$10^{\lg A} = A; \quad \lg 1 = 0; \quad \lg 10 = 1;$$

$$\lg \frac{1}{10} = -1, \ \ldots, \ \lg 10^n = n;$$

$$e^{\ln A} = A; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln e = 1; \tag{300}$$

$$\ln \frac{1}{e} = -1, \ \ldots, \ \ln e^n = n;$$

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B; \tag{301}$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B;$$

$$\log_a A^n = n \log_a A;$$

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A.$$

$$(A > 0, \ B > 0)$$

2. Calculul cu logaritmi. În baza proprietăţilor precedente, prin logaritmi, calculul produselor, cîturilor şi puterilor se reduc la sume, diferenţe şi înmulţiri (împărţiri). Se pune deci problema directă: găsirea logaritmului unui număr, şi apoi invers: găsirea numărului cînd îi cunoaştem logaritmul. Vom presupune că lucrăm cu tabele de logaritmi zecimali cu cinci zecimale (procedeul este acelaşi oricîte zecimale am avea).

a) *Logaritmul unui număr* are o parte întreagă numită *caracteristică* şi una zecimală numită *mantisă*.

b) *Calculul caracteristicii* (*c.*). Dacă numărul are parte întreagă, c. pozitivă şi este cu o unitate mai mică decît numărul cifrelor părţii întregi (de ex., 75, 345 are c. 1 iar 8,645 are c. 0).

Dacă numărul nu are parte întreagă, c. este negativă (semnul se pune deasupra) şi are atîtea unităţi care reprezintă a cîta cifră semnificativă este după 0 (de ex., 0,85 are c. $\overline{1}$ iar 0,0085 are c. $\overline{3}$)

c) *Calculul mantisei* (*m.*). În acest calcul se suprimă virgula numărului şi se pot adăuga la urmă cîte zerouri vrem.

Cazul întîi. Numărul are cel mult 4 cifre; m. se găseşte în tabele, primele două cifre găsindu-se în coloana 0. (de ex., pentru 857 căutăm la $N = 857$ pe coloana 0 şi găsim m. 93298, sau m. lui 6762 se caută pe coloana N la 676 şi se continuă pe linie pînă la coloana 2, care ne dă m. 83008.

Cazul al doilea. Numărul are mai mult de patru cifre; se procedează prin *interpolare* folosind două numere cu patru cifre N_1, N_2 între care este cuprins N, după regula

(302)
$$\frac{M - M_1}{N - N_1} = \frac{M_2 - M_1}{N_2 - N_1};$$
$$M = M_1 + \frac{N - N_1}{N_2 - N_1}(M_2 - M_1),$$

unde M_1, M_2 și M sînt mantisele lui N_1, N_2 și N (de ex., $N = 43{,}5768$ se suprimă virgula și luăm $N_1 = 4357$, $N_2 = 4358$; găsim în tabele $M_1 = 63919$, $M_2 = 63929$; deci $M = 63919 + \frac{0{,}68}{1} \cdot 10 = 63919 + 6{,}8 = 63926$ și $\lg N = 1{,}63926$).

d) *Găsirea numărului cînd cunoaștem logaritmul.* Dacă *m.* se găsește în tabele, cifrele din coloana N la care se adaugă cifra coloanei în care am găsit *m.* dă numărul a cărui valoare se determină în funcție de caracteristică invers decît am spus mai sus la *A.* (de ex., $\lg N = 1{,}66115$, rezultă $N = 45{,}83$; $\lg N = \overline{2}{,}93176$, rezultă $N = 0{,}08556$)

m. nu se găseşte în tabele. Se foloseşte (302) scrisă sub forma

(302′)
$$\frac{N - N_1}{M - M_1} = \frac{N_2 - N_1}{M_2 - M_1};$$
$$N = N_1 + \frac{M - M_1}{M_2 - M_1}(N_2 - N_1).$$

cu aceleaşi notaţii ca mai sus situînd pe M dat între două mantise M_1, M_2 corespunzătoare la numerele N_1, N_2 (de ex., lg $N = 0{,}34952$, $N_1 = 2236$, $N_2 = 2237$; $M_1 = 34947$, $M_2 = 34967$, deci $N = 2236 + \frac{5}{20} = 223625$; nu se pune virgulă şi în final $N = 2{,}23625$).

d) *Calcule cu logaritmi. Suma* se face ca la numerele obişnuite adunînd mantisele *(care sînt întotdeauna pozitive)* şi ceea ce prisoseşte se adună la caracteristice cu semnul +, care şi ele la rîndul lor, se adună ca numerele algebrice. (de ex., $\bar{3}{,}85342 + 1{,}73602 = \bar{1}{,}58944$).

Diferenţa se face transformînd logaritmul de scăzut în *cologaritm*; cologaritmul unui număr se obţine adăugînd la caracteristică +1 şi schimbîndu-i semnul, iar la mantisă scădem toate cifrele din 9 iar ultima semnificativă din 10

(de ex., $\overline{1},23567 - \overline{2},34570 = \overline{1},23567 + 1,65430 = 0,88997$).

Înmulțirea cu un număr natural se face în mod obișnuit (de ex., $4 \times \overline{1},65023 = \overline{2},60092$).

Împărțirea cu un număr natural se face în mod obișnuit dacă caracteristica este pozitivă; dacă însă este negativă, se completează cu atîtea unități pînă împărțirea se face exact și unitățile adăugate se așază în fața mantisei $\left(\text{de ex., } \frac{1}{3}\overline{1},23576 = \frac{\overline{3}}{3} + \frac{1}{3}2,23576 = \overline{1},74525\right)$.

§ 7.3. Noțiunea de limită

1. Șiruri convergente. Se zice că un șir a_n este *convergent* și are ca limită un număr finit a, dacă și numai dacă unui număr $\varepsilon > 0$ *arbitrar*, putem face să-i corespundă un *rang* N astfel ca pentru *toate* valorile lui $n > N$ să avem

$$|a_n - a| < \varepsilon. \tag{303}$$

Aceasta este totuna cu a spune că în afara *oricărei* vecinătăți a lui a se găsesc numai un număr finit de termeni ai șirului. Vom scrie. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Orice şir monoton mărginit este convergent. Şirul

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{303'}$$

este strict crescător şi mărginit superior; limita lui se notează cu $e = 2{,}7182\ldots$ (număr transcendent § 1.1.8 b).

2. Se zice că un şir a_n tinde către $+\infty$, dacă şi numai dacă unui număr M *arbitrar*, putem face să-i corespundă un *rang* N astfel ca pentru *toate* valorile lui $n > N$ să avem

$$a_n > M. \tag{304}$$

Aceasta este totuna cu a spune că în afara oricărei vecinătăţi a lui $+\infty$ se află un număr finit de termeni ai şirului. Vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Definiţie analogă pentru şiruri care au ca limită pe $-\infty$. Orice şir crescător nemărginit are limita $+\infty$, iar orice şir descrescător nemărginit are limita $-\infty$.

Orice şir care nu este convergent se numeşte *divergent*. Un şir poate fi divergent avînd ca limită pe $\pm\infty$ sau ne avînd o limită unică, ca în cazul convergenţei.

3. Dacă oricare ar fi şirul $x_n (x_n \in X)$ care are ca limită pe a $(x_n \neq a)$, şirul valorilor funcţiei

$f_n = f(x_n)$ are *aceeași limită* l, vom spune că $f(x)$ are ca limită pe l și vom scrie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. În această definiție a sau l pot fi $\pm\infty$.

Avem următoarele teoreme:

a) Dacă $|f(x)| \leqslant g(x)$ și dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

b) Dacă $f(x) \geqslant g(x)$ și dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

c) Dacă $f(x) \leqslant g(x)$ și dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

4. Dacă oricare ar fi șirul $x_n (x_n \in X)$ astfel ca $x_n < a$, are ca limită pe $a (x_n \neq a)$, șirul valorilor funcției $f_n = f(x_n)$ are aceeași limită l_s, vom spune că $f(x)$ are *la stînga* ca limită pe l_s. Vom obișnui să notăm această limită cu $l_s = f(a - 0)$ și vom scrie $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = l_s = f(a - 0)$. Analog se definește limita *la dreapta*: $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = l_d = f(a + 0)$. Cele două limite se numesc *limite laterale*.

5. Operaţii cu limite (valabile şi pentru şiruri):

(305) $$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x).$$

(306) $$\lim_{x\to a}[m\,f(x)]=m\lim_{x\to a}f(x)\qquad (m=\text{const}).$$

(307) $$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

(308) $$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\quad[\lim_{x\to a}g(x)\neq 0].$$

(309) $$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=[\lim_{x\to a}f(x)]^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

$[f(x)>0]$

În aceste formule presupunem că toate limitele există şi că expresiile din dreapta au sens. Formulele (309) şi (307) se pot generaliza în cazul în care avem un număr finit de funcţii.

6. Limite importante.

(310) $$\lim_{x\to a}c=c\ (c=\text{const})$$

(311) $$\lim_{x\to\varepsilon\infty}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n)=(A_0\varepsilon^n)\infty\qquad(\varepsilon=\pm 1).$$

(312) $$\lim_{x\to\varepsilon\infty}\frac{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n}{B_nx^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_{m-1}x+B_m}=$$
$$=\begin{cases}0 \text{ cînd } n<m,\\ \dfrac{A_0}{B_0} \text{ cînd } n=m, \quad (\varepsilon=\pm 1)\\ (A_0/B_0)\varepsilon_\infty^{n-m} \text{ cînd } n>m.\end{cases}$$

(313) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} mx}{x}=m.$$

(314) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0 \ (\varepsilon\in R^+).$$

(315) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty(\alpha\in R^+).$$

(316) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2k}}=+\infty(k\in N).$$

(317) $$\lim_{\substack{x\to 5\\ x<0}}\frac{1}{x^{2k+1}}=-\infty(k\in N).$$

(318) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^{2k+1}}=+\infty(k\in N).$$

(319) $$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\to\infty}}(1+\alpha)^\beta=e^{\lim\alpha\beta}$$

(320) $$\lim_{n\to\infty}|a_n|=\left|\lim_{n\to\infty}a_n\right|.$$

§ 7.4. Funcţii continue

1. Fie $f(x)$ o funcţie definită pe X cu valori în Y şi $x_n \in X$, un şir oarecare avînd ca limită pe x_0. Dacă şirul $f_n = f(x_n) \in Y$ are ca limită pe $f(x_0) \in Y$, atunci se zice că $f(x)$ este *continuă* în x_0. Adică

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Această definiţie mai poate fi enunţată: se zice că o funcţie $f(x)$ este continuă pentru valoarea $x = x_0$, dacă unui $\varepsilon > 0$ arbitrar, putem face să-i corespundă un *număr* $\delta > 0$, astfel ca pentru *toate* valorile lui x care satisfac inegalitatea $|x - x_0| < \delta$, să avem

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Se zice că o funcţie este continuă pe X cînd este continuă pentru toate valorile lui $x \in X$. Graficul unei funcţii continue este construit dintr-o trăsătură continuă în intervalul de definiţie.

Punctele în care o funcţie nu este continuă, se numesc *puncte de discontinuitate*.

2. Proprietăţile funcţiilor continue.

a) Dacă f şi g sînt funcţii continue pe mulţimea X, atunci funcţiile $f + g$, $mf (m = \text{const})$, fg, f/g sînt continue pe X (presupunînd în ultima $g \neq 0$ pe X).

b) O funcţie compusă definită cu ajutorul a două funcţii continue pe X este de asemenea continuă pe X.

c) Funcţia inversă a unei funcţii bijective continue, este continuă pe Y.

3. Continuitatea funcţiilor elementare.

T. 23.

Funcţia	Mulţimea de continuitate	Funcţia	Mulţimea de continuitate
$P(x)$, polinom	$x \in R$	cos x	$x \in R$
$\frac{P(x)}{Q(x)}$ fracţie raţională	$x \in R - \{x_1, \ldots, x_p\}$, x_p fiind rădăcinile reale ale ec. $Q(x) = 0$	tg x	$x \in R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $k \in N$
		cotg x	$x \in R - \{k\pi\}$, $k \in N$
$x^m (m \in R)$	$m>0$ $x \in R$ $m<0$ $x \in R - \{0\}$	arcsin x	$x \in [-1, +1]$
		arccos x	$x \in [-1, +1]$
$a^x (a>0)$	$x \in R$	arctg x	$x \in R$
$\log_a x (a > 0, \neq 1)$	$x \in R^+ - \{0\}$	arccotg x	$x \in R$
sin x	$x \in R$		

§ 7.5. Funcții derivabile

1. Se consideră o funcție $f : X \to Y$ definită pe intervalul X și fie $x_0 \in X$. Calculăm *creșterile* $\Delta x = x - x_0$, $y = f(x) - f(x_0)$ pentru x vecin cu x_0. Dacă

$$(321) \qquad \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)}$$

există și este *finită* se zice că funcția $f(x)$ este *derivabilă* în x_0 și are ca derivată pe $f'(x_0)$. Vom spune că $f(x)$ este derivabilă pe X, dacă este derivabilă în toate punctele X. Funcția derivată se notează cu $y' = f'(x) = dy/dx$. O funcție derivabilă pe X este în același timp continuă pe X.

2. Dacă raportul (321) nu are limită într-un punct x_0, dar are o limită la stînga și una la dreapta, vom spune că aceste limite sînt respectiv *derivata la stînga* $f'(x_0 - 0)$ și *derivata la dreapta* $f'(x_0 + 0)$ ale funcției $f(x)$ în x_0.

8. Derivatele funcțiilor elementare.

T. 24.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c = \text{const}$	0	$\log_a x$ $(a>0,\neq 1)$	$\frac{1}{x}\log_a e$
$x^m (m \in R)$	mx^{m-1}	$\sin ax$	$a \cos ax$
$\frac{1}{x^m}\ (m \in R)$	$-\frac{m}{x^{m+1}}$	$\cos ax$	$-a \sin ax$
		$\operatorname{tg} ax$	$\frac{a}{\cos^2 ax}$
$\sqrt[n]{x} (2 \leqslant n \in N)$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\operatorname{cotg} ax$	$-\frac{a}{\sin^2 ax}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Funcţiile elementare sînt derivabile pe intervalele de continuitate (T. 23).

4. Derivatele funcţiilor compuse. În ipoteza că funcţiile care vor intra în calcule sînt derivabile pe aceeaşi mulţime, avem regulile:

(322)	$y = f(u)$ unde $u = g(x)$; $y' = f'_u(u)g'_x(x) = f'_u u'_x$.
(322′)	$y = f(u)$ unde $u = g(v)$ iar $v = h(x)$; $y' = f'_u(u)g'_v(v)h'_x(x)$.
(323)	$y = cf(x)$ $(c = \text{const})$, $y' = cf'(x)$
(324)	$y = f(x) + g(x)$, $y' = f'(x) + g'(x)$.
(325)	$y = f(x)\,g(x)$; $y' = f'(x)\,g(x) + f(x)g'(x)$.
(326)	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $y' = \dfrac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{g^2(x)}$.
(327)	$y = [f(x)]^m$, $y' = m[f(x)]^{m-1} f'(x)$.
(328)	$y = [f(x)]^{g(x)} = u^v [f(x) > 0$ pe $X]$, $y' = vu^{v-1} u' + u^v v' \ln u$.
(329)	$y = f^{-1}(x)$, $y' = 1/f'(x)$.

Regulile (324) şi (325) se pot extinde la cazul unui număr finit de termeni, respectiv factori.

Regula (326), mai ales în cazul a mai multor factori, se poate scrie sub forma

$$(326')\quad \frac{[f_1(x)\,f_2(x)\ldots f_n(x)]'}{f_1(x)\;f_2(x)\;\ldots\;f_n(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \ldots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

și se numește *derivata logaritmică* a produsului.

5. Funcția $f'(x)$ la rîndul ei poate avea o derivată care se va numi *derivata a doua* a funcției $f(x)$ și o vom nota cu: $y'' = f''(x) = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$. Din aproape în aproape se poate vorbi de *derivata de ord. n* a unei funcții și o vom nota cu

$$(330)\qquad y^n = f^n(x) = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

Dacă o funcție admite o derivată de ord. n pe X, atunci funcția împreună cu toate derivatele pînă la ord. $(n-1)$ sînt funcții continue.

6. În (T. 25) avem exemple de funcții ale căror derivate de ord. n pot fi exprimate prin formule simple.

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
$pf(x)+qg(x)$	$pf^{(n)}(x) + qg^{(n)}(x)$ $(p, q \text{ const})$
$x^m (m \in R)$	$m(m-1) \dots (m-n+1)x^{m-n}$; dacă $m \in N$ și $m < n$, $f^{(n)}(x) = 0$
$(ax+b)^m$	$m(m-1)\dots(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$ (aceeași observare ca la cazul precedent)
e^x	e^x
$a^x (a > 0)$	$a^x (\ln a)^n$
$\ln x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$
$\log_a x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n} \log_a e$
$\sin x$	$\sin\left(x + \frac{1}{2} n\pi\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + \frac{1}{2} n\pi\right)$
$u(x)v(x) = uv$	$u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \dots + C_n^p u^{(n-p)} v^{(p)} + \dots + uv^{(n)}$ (formula lui Leibnitz)

7. Dacă se dă o creştere dx variabilei, o funcţie derivabilă capătă o creştere care este aproximativ egală cu

$$f(x + dx) - f(x) \sim f'(x)dx \tag{331}$$

şi care se numeşte *diferenţiala* funcţiei y şi se notează cu

$$dy = f'(x)dx. \tag{331'}$$

Dacă $f(u)$ este funcţie compusă, diferenţiala se calculează prin aceeaşi formulă (331'). Avem regulile:

$$\boxed{\begin{aligned} &d[f(x) + g(x)] = df(x) + dg(x);\\ &d[f(x)g(x)] = f(x)dg(x) + g(x)df(x);\\ &d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}. \end{aligned}} \tag{332}$$

§7.6. Proprietăţile funcţiilor derivabile; extreme, nedeterminări, grafice

În acest paragraf vom considera funcţii $f(x)$ derivabile pe intervalul X avînd valori în Y. Nu vor fi menţionate decît excepţiile.

1. Dacă $f(x) = 0$ pe X, $f(x)$ se reduce la o constantă pe această mulţime. Dacă $f'(x) = g'(x)$ pe

o mulțime X, atunci $f(x) = g(x) + C$ (C = const) pe această mulțime.

2. Dacă $M[x, f(x)]$ este un punct pe graficul funcției (fig. 228), atunci $f'(x)$, calculată în acest punct, reprezintă coeficientul unghiular al tangentei în M : $\operatorname{tg} \theta = f'(x)$.

Prin tangenta MT într-un punct M la un arc de curbă AB, înțelegem limita unei secante variabile MM' cînd M' vine (pe curbă) să se confunde cu M. Rezultă că graficul funcției, pe lîngă faptul că este construit printr-o trăsătură continuă (funcția fiind continuă), are în fiecare punct o tangentă unic determinată.

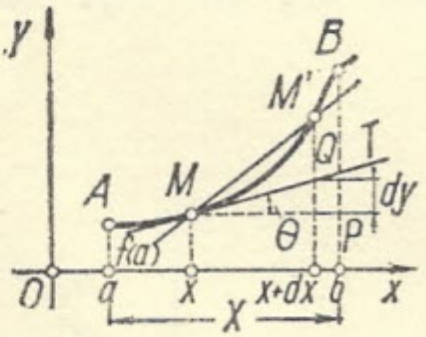


Fig. 228

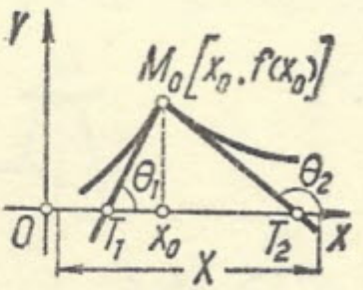


Fig. 229

3. Dacă în $M_0[x_0, f(x_0)]$ (fig. 229) funcția nu este derivabilă, dar are o derivată la stînga și una la dreapta, înseamnă că în acest punct graficul are două tangente, una la stînga și alta la dreapta astfel ca $f'(x_0 - 0) = \operatorname{tg} \theta_1$, $f'(x_0 + 0) = \operatorname{tg} \theta_2$.

4. Dacă în x funcţia este derivabilă (fig. 228), la creşterea variabilei $\Delta x = MP = dx$, corespunde creşterea funcţiei $\Delta y = PM$; segmentul PQ reprezintă diferenţiala funcţiei dy.

5. Într-un punct (adică pentru o valoare $x = x_0$), în care derivata $f'(x)$ se anulează, tangenta va fi paralelă cu Ox. Dacă $f'(x)$ schimbă de semn cînd x variind, trece prin această valoare se zice că funcţia $f(x)$ are în acest punct un *extrem* (fig. 230).

6. Într-un punct x_0, în care derivata a doua se anulează, curba în general traversează tangenta; în acest caz se zice că graficul are în x_0 un *punct de inflexiune* (x_4 pe fig. 230 şi x_0 pe fig. 231).

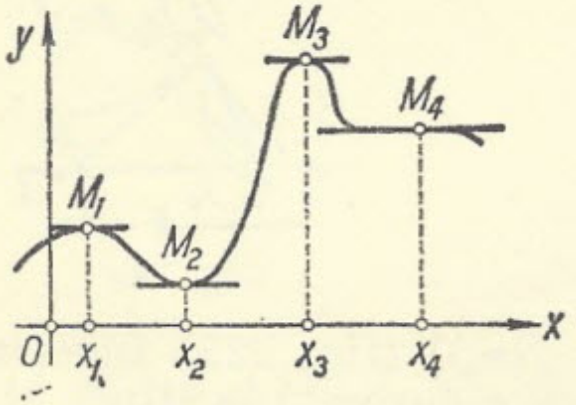


Fig. 230

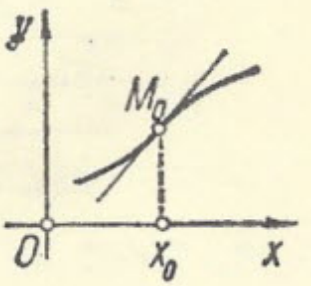


Fig. 231

7. Dacă $f'(x) < 0$ pe X, atunci funcţia $f(x)$ este *strict descrescătoare* pe X; dacă $f'(x) > 0$ pe X, atunci funcţia $f(x)$ este ***strict crescătoare***

pe X. Dacă $f''(x) > 0$ pe X, graficul are *concavitatea* îndreptată spre y-cii pozitivi (fig. 232)

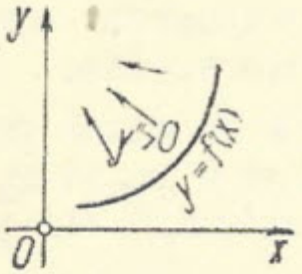


Fig. 232

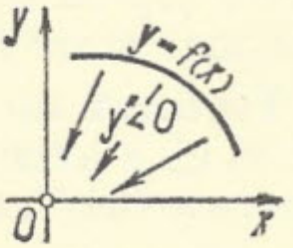


Fig. 233

și dacă $f''(x) < 0$ pe X, graficul are concavitatea îndreptată spre y-cii negativi (fig. 233).

8. Pentru a decide dacă într-un punct x_0, în care $f'(x_0) = 0$, funcția are un extrem, și care este *natura* acestui extrem, vom studia semnul derivatei la stînga și la dreapra lui x_0. Dacă $f'(x_0 - h_1) < 0$ și $f'(x_0 + h_2) > 0$ funcția are în x_0 un

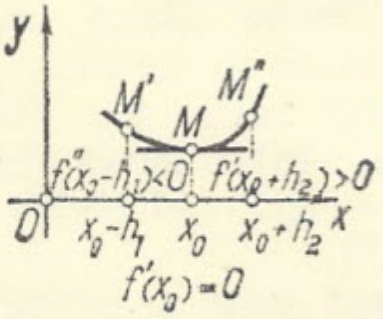


Fig. 234

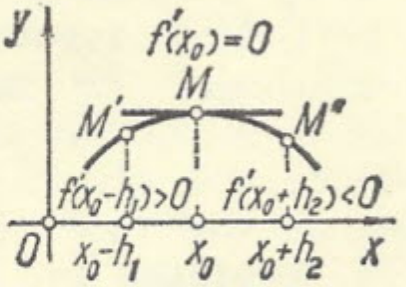


Fig. 235

minim (fig. 234) și un *maxim* în caz contrar (fig. 235). De asemenea, dacă $f''(x_0) < 0$, funcția are în x_0 un *maxim*, iar dacă $f''(x_0) > 0$, funcția are în x_0 un *minim*.

Observație. Se poate ca derivata să-și schimbe semnul cînd trece prin x_0 fără a avea un extrem în acest punct (fig. 236) în sensul dat la § 7.6.5 deoarece $f'(x_0) \neq 0$; totuși în x_0 valoarea funcției este cea mai mare față de valorile vecine.

9. Teorema lui Rolle.. Dacă în două puncte $x_1 < x_2 \in X$ avem $f(x_1) = f(x_2) = 0$ (x_1 și x_2 sînt zerouri ale lui f), atunci există *cel puțin* un punct

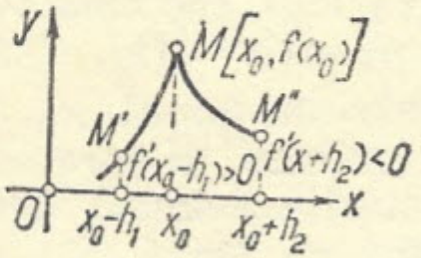


Fig. 236

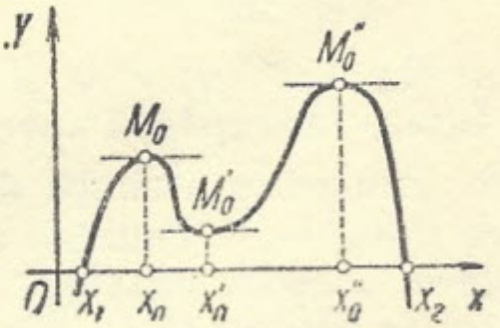


Fig. 237

$x_1 < x_0 < x_2$ în care $f'(x_0) = 0$. Dacă x_1 și x_2 sînt două zerouri *consecutive*, atunci $f'(x)$ se anulează de un număr fără soț de ori între x_1 și x_2. Sau mai scurt: între două zerouri consecutive ale funcției, există cel puțin un zero al derivatei (fig. 237).

10. Teorema lui Lagrange* (sau a creșterilor finite). Oricare ar fi $x_1 < x_2 \in X$, există un x_0 astfel ca $x_1 < x_0 < x_2$ pentru care

*) Teoremele Rolle și Lagrange presupun că funcția f este continuă pe intervalul X închis și derivabilă pe X deschis.

(333) $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_0)$.

Interpretarea geometrică a teoremei exprimă faptul că pe grafic există cel puțin un punct de abscisă x_0 în care tangenta este paralelă cu coarda M_1M_2 (fig. 238).

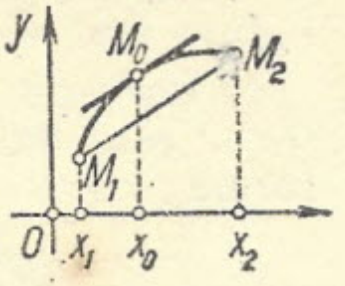


Fig. 238

11. Nedeterminări.

a) Se zice că o funcție are o valoare nedeterminată pentru $x = a$, dacă pentru această valoare, ia una din formele $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

b) Formele $0/0$ și ∞/∞ provin dintr-o funcție de forma $f(x) / g(x)$. Pentru *ridicarea* acestei nedeterminări, se aplică regula lui l'Hospital al cărei enunț este:

Regula lui l'Hospital. Dacă $f(a) = g(a) = 0$ și dacă se poate determina o vecinătate pe care $g(x) \neq 0$ afară de $x = a$, atunci

$$(334) \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

în ipoteza că limita din partea dreaptă există. În caz că $f'(a) = g'(a) = 0$, formula (334) se aplică din nou părții drepte, pînă cînd ultimul raport $f^n(a) / g^n(a)$ are o valoare unic determinată.

Regula lui l'Hospital se aplică şi în cazul în care $f(a) = g(a) = \infty$.

c) Forma $0 \cdot \infty$ provine dintr-o funcţie de forma $f(x) \cdot g(x)$ dacă $f(a) = 0$, $g(a) = \infty$; scriind sub forma

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)},$$

revenim la una din formele precedente şi putem aplica regula lui l'Hospital, bineînţeles la forma pentru care derivatele se calculează mai uşor.

d) Forma $\infty - \infty$ provine dintr-o funcţie de forma $f(x) - g(x)$ $[f(a) = g(a) = \infty]$. Scriind

$$f(x) - g(x) = f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right] = g(x)\left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right].$$

Dacă: $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, funcţia tinde către $\pm \infty$; dacă limita este 1 se aplică cele spuse la c).

e) Formele 0°, ∞°, 1^∞ provin* dintr-o funcţie de forma $F(x) = [f(x)]^{g(x)}$ pentru valori 0 sau ∞ ale funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$. Aplicînd logaritmii, ln $F(x)$ se va prezenta sub forma $0 \cdot \infty$ Pentru ultima nedeterminare, se va ţine seamă de (§7.3.6).

12. Grafice. Folosind teoremele de mai sus, graficul unei funcţii se face după următoarele norme:

*) prin trecere la limită.

a) Se caută mulțimea de definiție a funcției, adică intervalele în care trebuie să se găsească x pentru ca funcția să ia valori reale. Pentru funcțiile elementare se folosește (T. 22).

b) Se calculează limitele laterale la capetele acestor intervale.

c) Se calculează $f(0)$, cînd există, care va reprezenta ordonata punctului unde graficul funcției taie axa Oy.

d) Calculăm primele două derivate.

e) Calculăm semnul derivatei, determinînd extremele.

f) Calculăm punctele de inflexiune și sensul concavității.

Cu aceste valori construim *tabloul de variație* în care prima linie este formată din valorile lui x, linia a doua și a treia conțin semnul primei și a derivatei a doua, iar linia a patra valorile funcției. În ultima linie se introduc și săgeți care vor indica mersul graficului.

13. Dacă pe graficul unei funcții avem puncte care se depărtează spre infinit, vom spune că curba reprezentativă are o *ramură infinită*. Dacă există o dreaptă ale cărei puncte se apropie din ce în ce mai mult de punctele curbei astfel ca distanța dintre ele să tindă către zero cînd x tinde către o valoare finită sau către infinit, vom zice că dreapta este o *asimptotă* a graficului. Asemenea drepte se obțin în felul următor (fig. 239):

a) Asimptotele paralele cu Oy au ca abscise valorile lui $x = x_0$ pentru care funcția $y = f(x)$ este discontinuă și astfel ca $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm \infty$.

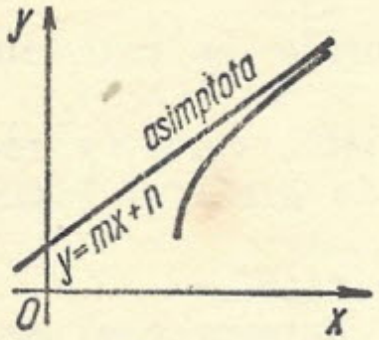


Fig. 239

b) Asimptote paralele cu Ox care au ordonatele date de $\lim y$, bineînțeles cînd această limită este finită.

c) Asimptote oblice, care au ecuația de forma $y = mx + n$ unde m și n sînt calculați prin formulele

$$(335)\quad m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$(335')\quad n = \lim_{x \to \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx].$$

Asemenea asimptote există cînd m și n sînt finiți și $m \neq 0$.

§ 7.7. Ecuații algebrice

1. O ecuație algebrică este o ecuație de forma

(336)

$$P(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

$P(x)$ fiind un polinom cu coeficienți reali sau complecși. O asemenea ecuație are n rădăcini $x_1, \ldots, x_n$ complexe cu ajutorul cărora polinomul $P(x)$ se poate scrie sub forma

$$(337)\quad P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Între rădăcinile și coeficienții polinomului avem relațiile

$$(338)\quad \boxed{\begin{gathered}\sum x_i = -a_1/a_0,\ \sum x_1x_2 = a_2/a_0,\ \ldots,\\ \sum x_1 \ldots x_p = (-1)^p a_p/a_0,\ \ldots,\\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n/a_0.\end{gathered}}$$

În particular, pentru ecuația de gr. 4, avem

$$(339)\quad \begin{gathered}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1/a_0,\\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = a_2/a_0,\\ (x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -a_3/a_0,\\ x_1x_2x_3x_4 = x_4/a_0.\end{gathered}$$

Se demonstrează că orice polinom simetric de gr. m în $x_1, \ldots, x_n$, se poate scrie sub forma unui polinom în $a_0, \ldots, a_n$ împărțit cu a_0^m $(m \in N)$. Notînd cu

$$(340)\quad S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k\ (k \in N)$$

avem *formulele lui Newton*

(341)

$$a_0 S_k + a_1 S_{k-1} + \ldots + a_{k-2} S_2 + a_{k-1} S_1 + k a_k = 0$$
$$\text{pentru } k \leqslant n,$$
$$a_0 S_{n+k} + a_1 S_{n+k-1} + \ldots + a_{n-2} S_{k+2} + a_{n-1} S_{k+1} + a_n S_k = 0,$$

care permit să calculăm sumele (340) din aproape în aproape. În particular

(341′) $$S_1 = -a_1/a_0, \quad S_2 = (a_1^2 - 2a_0 a_2)/a_0^2,$$
$$S_3 = (-a_1^3 + 3a_0 a_1 a_2 - 3a_0^2 a_3)/a_0^3, \ \ldots$$

2. Se zice că o rădăcină este *multiplă de ord. r*, a ecuației (336) (sau a polinomului $P(x)$) dacă în descompunerea (337) se întîlnește de r ori. Ținînd seamă de ordinul de multiplicitate al rădăcinilor, descompunerea (337) se scrie sub forma (§ 2.4.1)

(337′) $$P(x) = a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \ldots (x - x_p)^{m_p}$$
$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n).$$

Rădăcinile multiple sînt rădăcinile comune ale polinoamelor $P(x)$, $P'(x)$.

(342) Mai general o rădăcină multiplă de ord. r este rădăcină comună tuturor ecuațiilor

$$P(x) = 0, \ P'(x) = 0, \ldots, P^{(r-1)}(x) = 0, \quad P^{(r)}(x) \neq 0.$$

3. Ecuații cu coeficienți reali.

a) O ecuație de grad impar are întodeauna o rădăcină reală; în general, o ecuație de grad impar are un număr impar de rădăcini reale, iar o ecuație de grad par un număr par de rădăcini reale, sau nici una. Rădăcinile complexe se grupează două cîte două, astfel încît dacă o ecuație cu coeficienți reali admite o rădăcină complexă, admite și conjugata ei, cu același ordin de multiplicitate; deci un polinom cu coeficienți reali are descompunerea în factori reali

$$\boxed{\begin{aligned} &P(x) = a_0 (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_r)^{m_r} (x^2 + \\ &+ p_1 x + q_1)^{m_{r+1}} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{m_{r+s}}, \\ &(m_1 + \dots + m_r + 2m_{r+1} + \dots + 2m_{r+s} = n), \end{aligned}} \tag{343}$$

trinoamele avînd coeficienți reali.

b) Teorema lui Rolle cunoscută de la funcțiile derivabile (§ 7.6.9) se aplică aci în felul următor. Se determină rădăcinile reale ale ecuației derivate (aplicarea teoremei este deci legată de rezolvarea acestei ecuații), care, așezate în ordinea mărimii, să presupunem că sînt $x_1', x_2', \dots, x_p'$. Se formează șirul

(344)

$$P(-\infty),\ P(x_1'),\ P(x_2'),\ \dots,\ P(x_p'),\ P(+\infty),$$

numit *şirul lui Rolle*. Numărul schimbărilor de semn ale termenilor acestui şir reprezintă numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $P(x) = 0$.

c) *Teorema lui Descartes*. Numărul rădăcinilor reale pozitive ale unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi reali diferă de numărul schimbărilor de semn al şirului $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cu un număr par. Pentru rădăcinile negative considerăm ecuaţia $P(-x) = 0$.

4. Metode de rezolvare.

a) Notăm cu L *limita superioară* a rădăcinilor unei ecuaţii algebrice $P(x) = 0$. Atunci *limita inferioară* l a rădăcinilor pozitive va fi limita superioară a rădăcinilor ecuaţiei $P(1/x) = 0$; de asemenea, limita superioară $-L$ şi cea inferioară $-l$, a rădăcinilor negative ale ecuaţiei date vor fi limitele ecuaţiei $P(-x) = 0$. Rădăcinile reale ale ecuaţiei vor fi cuprinse în intervalele $(-L, -l)$, (l, L). Avem

$$\boxed{L = 1 + \sqrt[r]{\frac{N}{a_0}},} \tag{345}$$

unde $a_0 > 0$ este coeficientul primului termen, $n - r$ este puterea lui x a primului termen negativ (termenii se succed în ordinea descrescătoare a puterilor lui x), iar N este cea mai mare valoare absolută a coeficienţilor negativi.

b) Rădăcinile întregi ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi sînt divizorii ultimului termen a_n. Dacă a/b (a, b întregi) este o rădăcină a unei ecuații cu coeficienți întregi, atunci b este un divizor al lui a_0, iar a un divizor al lui a_n (§ 7.7.6).

c) Dacă $a + \sqrt{b}$ este o rădăcină multiplă de ord. p a unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali (b prin ipoteză nu este pătratul unui număr rațional), atunci și $a - \sqrt{b}$ este o rădăcină multiplă de același ordin (§ 7.7.3, a).

Dacă a este o rădăcină a unei ecuații algebrice de gr. n, prin împărțirea lui $P(x)$ cu $x - a$, rezolvarea ecuației date se reduce la rezolvarea ecuației $Q(x) = 0$, unde $P(x) = (x - a)Q(x)$.

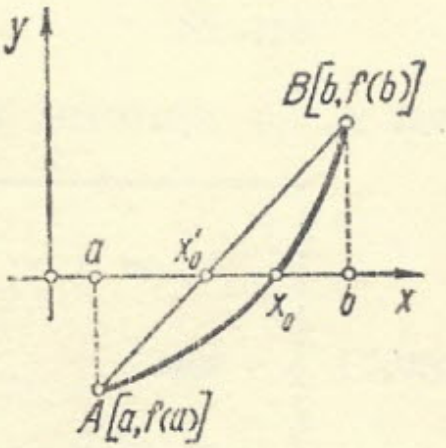


Fig. 240

5. Metode de aproximare. Să presupunem că, printr-o metodă oarecare am determinat două numere a și b între care ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină reală simplă și numai una, pe care s-o notăm cu x_0; atunci $f(a)f(b) < 0$. O valoare aproximativă a lui x_0 este dată prin *metoda coardei* (fig. 240) cu ajutorul formulei

$$x_0' = a - \frac{(b - a)f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{346}$$

A doua metodă se numeşte *metoda tangentei* (fig. 241 şi 242) şi ne dă valori aproximative ale

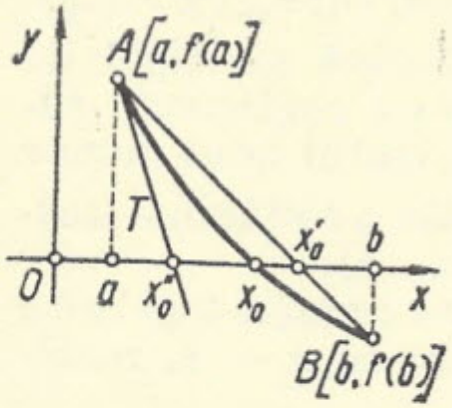


Fig. 241

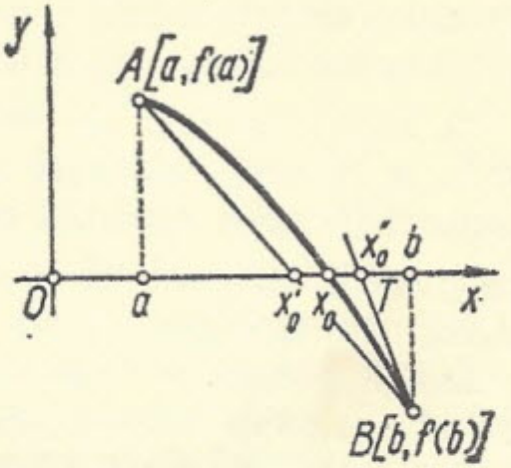


Fig. 242

lui x_0 cu ajutorul formulelor

(347)
$$x_0'' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ dacă } f(a)f''(a) > 0$$
sau
$$x_0'' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \text{ dacă } f(b)f''(b) > 0.$$

Valorile x_0' şi x_0'' (alese aşa cum s-a spus), sînt întotdeauna valoarea rădăcinii x_0, una prin lipsă şi alta prin adaos, încît putem înlocui intervalul iniţial cu (x_0', x_0'') sau (x_0'', x_0'). Continuînd cu

acest interval aşa cum am procedat cu primul, ne apropiem din ce în ce mai mult de valoarea lui x_0. În ambele metode, eroarea comisă cînd luăm în loc de a sau b pe x_0' sau x_0'' este mai mică decît $\frac{(b-a^2)M}{2m}$ unde M este o margine superioară a lui $f''(x)$, iar m o margine inferioară a lui $f'(x)$ în intervalul $[a, b]$. Metodele se pot repeta.

6. Schema lui Horner este o metodă practică pentru a încerca dacă α este o rădăcină a unei ecuaţii algebrice $P(x) = 0$. Se aşază pe prima linie coeficienţii ecuaţiei (presupuşi întregi)

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n, \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n, \end{array} \tag{348}$$

iar pe linia a doua numerele b calculate după formula de recurenţă $b_p = a_p + \alpha b_{p-1}$ $(b_0 = a_0)$; cu alte cuvinte un număr de pe linia a doua se capătă adunînd precedentul său înmulţit cu α la numărul corespunzător din prima linie şi aceeaşi coloană. Dacă $b_n = 0$, α este rădăcină şi cîtul împărţirii lui $P(x)$ cu $x - \alpha$ este polinomul

$$Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}.$$

Dacă α este fracționar și unul din numerele b_i de asemenea este fracționar, α nu poate fi rădăcină și deci cînd apare pe linia a doua a schemei (348) un asemenea număr, calculul se oprește.

§ 7.8. Primitive

1. Dacă $f(x)$ este continuă pe X, se numește *primitivă* o funcție $F(x)$ care satisface relației $F'(x) = f(x)$ și se notează cu $\int f(x)\mathrm{d}x$. O funcție are o infinitate de primitive definite prin relația

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C, \tag{349}$$

unde C este o constantă arbitrară numită *constantă de integrare*. Avem proprietățile

$$\int Af(x)\mathrm{d}x = A\int f(x)\mathrm{d}x, \quad (A = \text{const}) \tag{350}$$

$$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x. \tag{350'}$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \text{ arbitrar diferit de } -1).$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C = \ln C_1 x.$$

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \ (n \text{ arbitrar diferit de } -1).$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln (ax+b) + C = \frac{1}{a} \ln C_1 (ax+b).$$

$a > 0, \ a \neq 1.$

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$a > 0, \ a \neq 1.$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + C$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x} + C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{2ax + b + \sqrt{\Delta}} \right| + C \text{ dacă}$$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} + C \text{ dacă}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{a} \ln \left[2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right] + C \text{ dacă } a > 0.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C$$

dacă $a < 0$.

3. Metode de integrare. *Metoda substituţei* constă a înlocui o funcţie $g(x)$ prin u astfel ca în baza relaţiilor

$$g(x) = u, \quad g'(x)\,dx = du,$$

integrala să se reducă la una cunoscută, sau să se prezinte sub o formă mai simplă. După integrare se revine la variabila x.

De exemplu: a patra integrală din T. 26 se deduce din a doua prin substituţia $ax + b = u$.

b) *Integrarea prin părţi* se bazează pe formula

(351) $$\int f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,df(x).$$

c) *Integrarea fracţiilor raţionale*. O fracţie raţională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ireductibilă se reduce întotdeauna la cazul în care gr. P. gr. Q (§ 2.2.5). Presu-

punînd că polinomul $Q(x)$ este scris sub forma (343), fracţia se poate descompune în *fracţii simple* de forma

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{A_{m_i}^{m_i}}{(x-x_i)^{m_i}} + \ldots + \frac{A_1^{m_i}}{x-x_i}\right] + \\ + \sum_{j=r}^{s}\left[\frac{A_{m_{j+1}}^{m_{j+1}}x + B_{m_{j+1}}^{m_{j+1}}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_{j+1}}} + \ldots + \right. \\ \left. + \frac{A_1^{m_{j+1}}x + B_1^{m_{j+1}}}{x^2+p_jx+q_j}\right].\end{aligned}} \tag{852}$$

De exemplu

$$\frac{cx+d}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}, \quad (a \neq b)$$

$$\frac{c_0x^2+c_1x+c_2}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{C}{x-b},$$

$$\frac{c_0x+c_1x+c_2x+c_3}{(x-a)^3(x^2+px+q)^2} = \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{B}{(x-a)^2} +$$

$$+ \frac{C}{x-a} + \frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^2} + \frac{Fx+G}{x^2+px+q}$$

$(p^2-4q<0)$.

Pentru determinarea coeficienților numerici A, B, ... se aduce la același numitor în dreapta și se identifică polinoamele de la numărătorii ambelor părți (§ 2.2.6). În particular, în dezvoltarea (352) avem

$$(352') \quad \boxed{A_{m_i}^{m_i} = \left[(x - x_i)^{m_i} \frac{P(x)}{Q(x)}\right]_{x=x_i}.}$$

Integralele fracțiilor din partea dreaptă se calculează cu ajutorul formulelor din (T. 26).

§ 7.9. Integrale definite. Aplicații geometrice

1. Se consideră o funcție $f(x)$ *mărginită* într-un interval închis $[a, b]$ (fig. 243) pe care se consideră o *diviziune* prin punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$. În fiecare din intervalele determinate, se alege arbi-

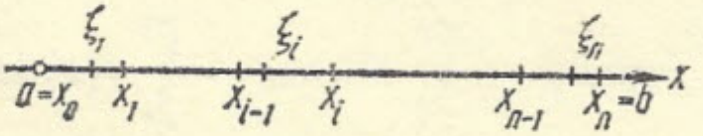


Fig. 243

trar o valoare $x_{i-1} \leqslant \xi_i < x_i$ și apoi se formează suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Dacă această sumă are o limită cînd n tinde către infinit, fiecare interval

tinzînd către zero, se zice că $f(x)$ este *integrabilă* pe $[a, b]$ în *sens Riemann* și se scrie

$$\lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx, \tag{353}$$

a și b se numesc *limitele* integralei. Integrala nu depinde de valorile ξ_i. Funcțiile continue sînt integrabile. Dacă $F(x)$ este o primitivă a lui $f(x)$, atunci

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{354}$$

2. Proprietăți.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x; \tag{355}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b Af(x)\,\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (A = \text{const}) \tag{356}$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{357}$$

8. Arii.

a) Dacă arcul care reprezintă graficul funcției $y = f(x)$ nu taie axa Ox și este continuu între a și b (fig. 244), atunci

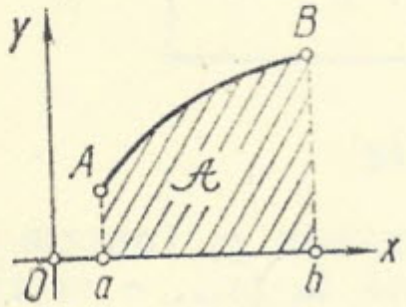


Fig. 244

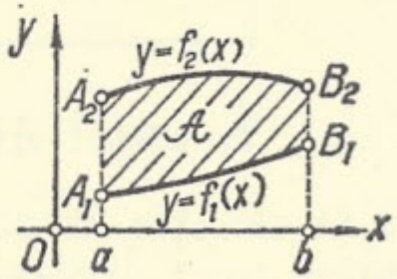


Fig. 245

(358)
$$\mathcal{A}_{aABb} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

b) Dacă arcele A_1B_1 și A_2B_2 (fig. 245) sînt definite prin ecuațiile $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, ambele deasupra axei Ox și nu se intersectează între ele, atunci

(359)
$$\mathcal{A}_{A_1A_2B_1B_2} = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x.$$

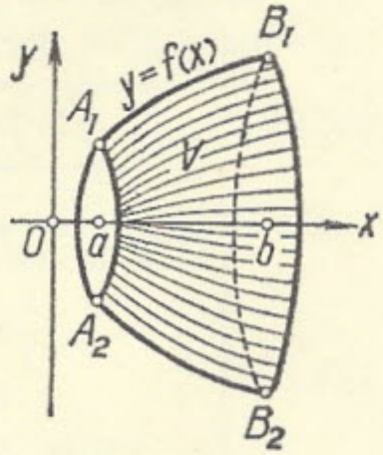


Fig. 246

4. Volume. În aceleași condiții, rotind arcul A_1B_1 în jurul lui Ox (fig. 246), se obține

un corp de rotație al cărui volum este dat de integrala

$$V_{A_1B_1B_2A_2} = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{360}$$

§ 7.10. Ecuații diferențiale

1. O ecuație în care necunoscuta y, funcție de x, intră prin derivatele ei pînă la ord. n se zice că este o *ecuație diferențială de ord. n*. Soluția unei asemenea ecuații, cînd există, depinde de n constante arbitrare. În general, una din soluții este determinată prin cunoașterea valorilor funcției și primelor $n - 1$ derivate pentru o valoare $x = x_0$; se zice că soluția este determinată prin *condiții inițiale*.

2. Ecuații de ordinul 1.

a) *Ecuații cu variabile separabile*, adică ecuații care se scriu sub forma

$$f(x)\, f_1(y)y' = g(x)\, g_1(y). \tag{361}$$

Soluția este definită prin formula

$$\int \frac{f_1(y)}{g_1(y)}\,\mathrm{d}y - \int \frac{g(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = C, \tag{361'}$$

unde C este o constantă arbitrară.

b) *Ecuaţii omogene* sînt ecuaţii de tipul

$$\boxed{y' = f(y/x).} \tag{362}$$

Se integrează prin substituţia $y = tx$.

Se obţine

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}t}{f(t) - t} = \ln Cx \ (C = \text{const}).} \tag{362'}$$

După efectuarea integralei, se înlocuieşte $t = y/x$.

c) *Ecuaţii liniare* sînt ecuaţii de tipul

$$\boxed{y' + f(x)y + g(x) = 0} \tag{363}$$

care au ca soluţii

$$\boxed{y = e^{-\int f\,\mathrm{d}x}\left(C - \int g e^{\int f\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right), \quad (C = \text{const})} \tag{363'}$$

3. Ecuaţii de ordinul 2 liniare cu coeficienţi constanţi, fără partea dreaptă, sînt ecuaţii de tipul

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \quad (a, b, c = \text{const})} \tag{364}$$

Pentru găsirea soluției, se consideră *ecuația caracteristică*

(365) $$\boxed{ar^2 + br + c = 0.}$$

a) Dacă (365) are rădăcini reale $r_1 \neq r_2$, atunci

(364′) $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ $(C_1, C_2 = \text{const})$.

b) Dacă (365) are o rădăcină dublă r, atunci

(364″) $y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$ $(C_1, C_2 = \text{const})$.

c) Dacă (365) are rădăcinile complexe $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, atunci

(364‴) $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
$(C_1, C_2 = \text{const})$.

8. MECANICĂ

§ 8.1. Elemente de statică

1. În mecanică o forță este reprezentată printr-un vector; dacă este aplicată unui punct material este considerată ca un vector legat (§ 6.1.1), iar dacă este aplicată unui corp solid rigid este reprezentată printr-un vector alunecător. Operațiile cu forțele se deduc din operațiile cu vectori.

Fiind dată forța **F** (fig. 247) reprezentată prin vectorul alunecător **AB** (caracterizat prin mărime, sens și suportul Δ), se numește *momentul* său față de un punct *O (pol)* exterior lui Δ, produsul vectorial $\mathbf{M}_0 = \mathbf{OA} \times \mathbf{AB}$. Prin definiție momentul este invariant față de poziția forței pe suport și este nul cînd $\mathbf{F} = 0$ sau cînd polul se găsește pe suportul forței.

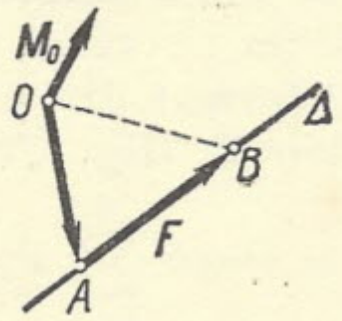


Fig. 247

2. Dacă $\mathbf{F}_1, \ldots, \mathbf{F}_n$ sînt mai multe forțe formînd un sistem (S), care acționează asupra unui

corp solid rigid, prin *rezultanta generală* **R** într-un punct O se înţelege suma acestor vectori consideraţi liberi, iar prin momentul rezultant $\mathbf{M}_0$ faţă de O, suma momentelor componentelor faţă de acest punct. Momentul faţă de O al rezultantei generale aplicată în A, a unui sistem de vectori concurenţi în A, este egal cu suma momentelor vectorilor componenţi (Varignon).

3. Se numeşte *cuplu* un sistem format din doi vectori alunecători **F**, $-\mathbf{F}$ paraleli (fig. 248). Momentul rezultant al cuplului **M** este acelaşi în orice punct al spaţiului. Un sistem de forţe $\mathbf{F}_i$ este în general echivalent cu sistemul format dintr-un vector şi un cuplu.

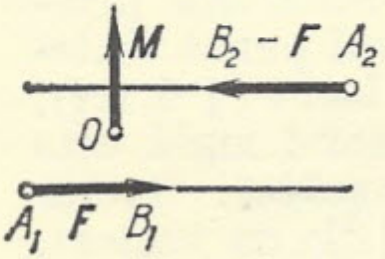


Fig. 248

Condiţia necesară ca un corp solid rigid să fie în echilibru este ca sistemul de forţe care acţionează asupra solidului să fie echivalent cu zero. Această condiţie devine şi suficientă dacă corpul este în repaos.

4. Forţe paralele. Presupunem că avem un sistem (S) format din n forţe paralele $\mathbf{F}_i$ (fig. 249).

a) Dacă $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \neq 0$, sistemul este echivalent cu

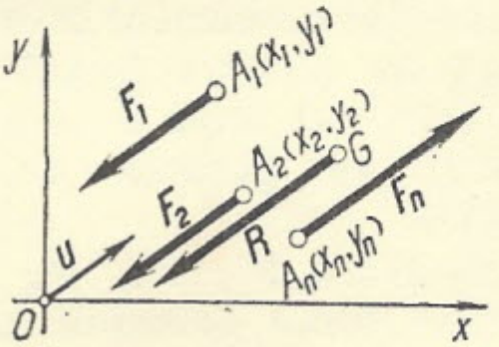


Fig. 249

o *forță rezultantă* $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{u} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$, unde $\mathbf{u}$ este versorul comun forțelor $\mathbf{F}_i$ (§ 6.1.1). Dacă notăm cu $A_i\ (x_i,\ y_i)$ coordonatele punctelor de aplicație a forțelor, punctul de aplicație al rezultantei va fi

$$(366) \qquad \boxed{G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\, x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}\right).}$$

În cazul a două forțe (fig. 250), pentru a găsi pe G luăm pe suportul lui $\mathbf{F}_1$, $A_1C_2 = A_2B_2$ și pe suportul lui $\mathbf{F}_2$, $A_2C_1 = A_1B_1$; dreapta C_1C_2 taie pe A_1A_2 în G. Determinarea lui G în general se poate face geometric din aproape în aproape.

b) Dacă $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0$, $\mathbf{R} = 0$, (S) se reduce la un cuplu $\mathbf{M}_0$ perpendicular pe planul forțelor și a cărui mărime este

$$u_y \sum_{i=1}^{n} F_i\, x_i \quad - u_x \sum_{i=1}^{n} F_i\, y_i,$$

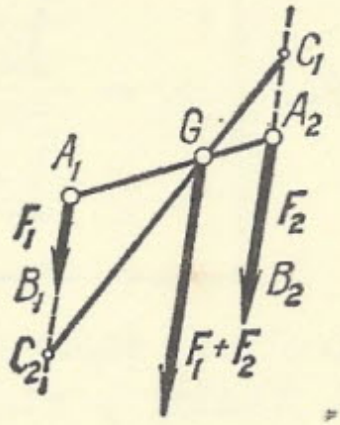


Fig. 250

u_x şi u_y fiind componentele lui **u**; punctul de aplicaţie G este arbitrar (fig. 251).

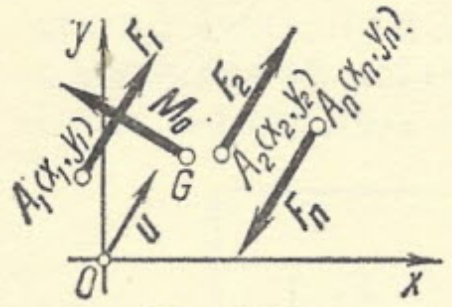


Fig. 251

5. Centre de greutate. Fie un sistem de puncte materiale M_i în care avem aplicată o forţă $\mathbf{F}_i$ egală cu greutatea punctului; punctul de aplicaţie al acestor forţe paralele (dirijate pe verticală) se numeşte *centrul de greutate* G al sistemului. Rezultanta este greutatea sistemului. Coordonatele lui G se găsesc la fel ca la § 8.1.4. Analog se defineşte centrul de greutate al unei bare, suprafeţe sau corp *neomogen*. Astfel, dacă o bară, avînd greutatea specifică $\mu(x)$ este aşezată pe Ox (fig. 252), centrul de greutate va avea abscisa

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\mu(x)\,dx}{\int_a^b \mu(x)\,dx}, \tag{367}$$

numitorul reprezentînd *masa* barei. Analog, pentru placa formată din suprafaţa $AA'B'B$ (fig. 253),

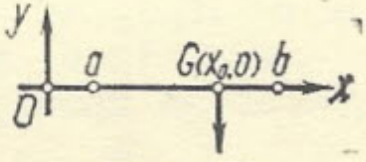


Fig. 252

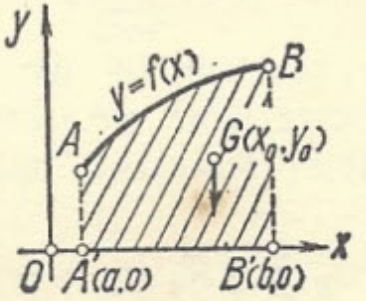


Fig. 253

avem
(368)

$$x_0 = \frac{\int_a^b x\ \mu(x) f(x)\,dx}{\int_a^b \mu(x) f(x)\,dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b y\ \mu(x) f(x)\,dx}{\int_a^b \mu(x) f(x)\,dx},$$

unde $y = f(x)$ este ecuația arcului ce mărginește placa. Numitorul comun reprezintă masa plăcii.

6. Centre de greutate a corpurilor omogene [$\mu(x) = \text{const}$] mai des întîlnite:

T. 27.

Linii, suprafețe și corpuri materiale	Centrul de greutate
Segmentul de dreaptă	G mijlocul segmentului
Perimetrul unui triunghi	G_p este intersecția bisectoarelor triunghiului median; cu notațiile de pe fig. 254 $x_0 = \frac{a(a+2b)+\alpha(c-b)}{2(a+b+c)}$, $y_0 = \frac{h(b+c)}{2(a+b+c)}$.

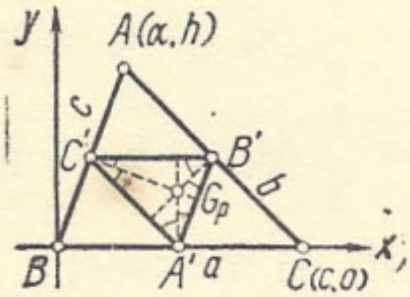
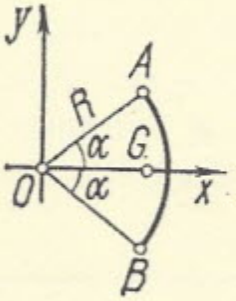


Fig. 254

Linii, suprafeţe şi corpuri materiale	Centrul de greutate
Perimetrul paralelogramului	G este intersecţia diagonalelor
Arc de cerc	
 Fig. 255	$G\left(R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha},\ 0\right)$, măsurat în radiani (fig. 255)
Semicerc	$G\ (2R/\pi,\ 0)$
Cercul	G este centrul cercului
Aria triunghiului avînd vîrfurile $M_i\,(x_i, y_i)\ (i = 1, 2, 3)$	G este la întîlnirea medianelor şi are coordonatele $x_0 = \frac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_0 = \frac{1}{3}\,(y_1 + y_2 + y_3)$
Aria dreptunghiului	G este la intersecţia diagonalelor

Linii, suprafețe și corpuri materiale	Centrul de greutate
Aria trapezului	

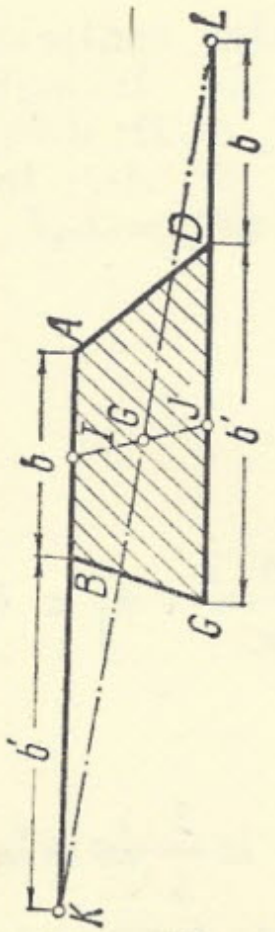
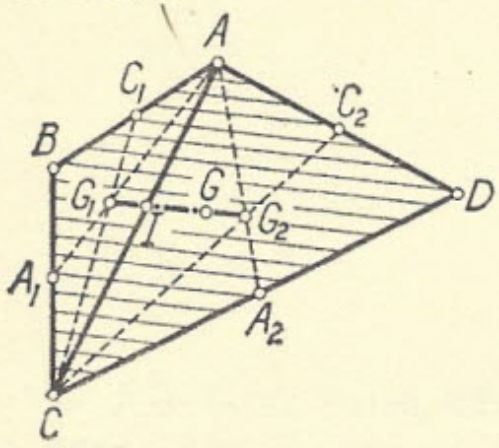
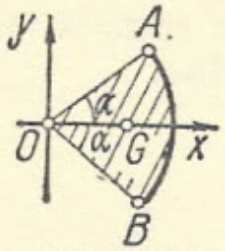


Fig. 256

Pe baza mică se ia $BK = b'$ și pe baza mare $DL = b$; G este la intersecția lui KL cu IJ dreapta care unește mijloacele bazelor.

Linii, suprafeţe şi corpuri materiale	Centrul de greutate
Aria unui patrulater oarecare  Fig. 257	G_1 şi G_2 sînt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ACD; dreapta G_1G_2 taie pe AC în I şi se ia $GG_2 = G_1I$
Sector de cerc  Fig. 258	$G\left(\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$ α în radiani
Piramida şi conul	G se află la $\frac{1}{4}$ de la bază şi dreapta care uneşte vîrful cu centrul de greutate al bazei

Linii, suprafețe și corpuri materiale	Centrul de greutate
Prisma și cilindrul	G se află la mijlocul dreptei ce unește centrele de greutate ale bazelor

§ 8.2. Elemente de cinematică

1. Un punct în mișcare descrie în plan o curbă numită *traiectorie*. Dacă luăm timpul ca variabilă, coordonatele punctului mobil pe traiectorie vor fi $M[x(t), y(t)]$ și vectorul de poziție (§ 6.1.1)

$$\boxed{r = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.} \tag{369}$$

Se numește *viteză medie* în intervalul de timp Δt expresia (fig. 259)

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j}, \tag{370}$$

unde Δr, Δx, Δy sînt creșterile corespunzătoare lui $\mathbf{r}$, x, y. *Viteza* punctului este reprezentată prin vectorul

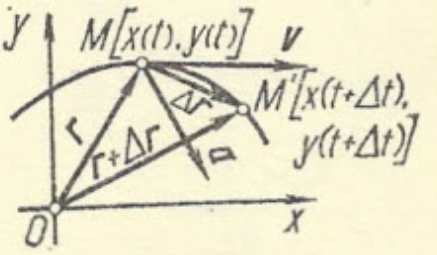


Fig. 259

(371) $$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}}$$

atașat punctului M și situat pe tangenta în M la traiectorie. *Accelerația* mobilului este reprezentat printr-un vector care măsoară în unitatea de timp variația vitezei; are ca expresie

(372) $$\boxed{\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}.}$$

2. Mișcarea rectilinie este mișcarea descrisă de un mobil pe o dreaptă, de exemplu axa Ox. Se zice că mișcarea este *uniformă* cînd viteza este constantă și deci accelerația nulă; rezultă

(373) $$x = at + b \quad (a,b = \text{const}).$$

Mișcarea se numește *uniform accelerată* cînd accelerația este constantă; în acest caz

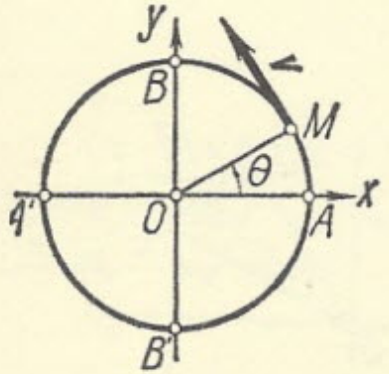


Fig. 260

(374) $$x = \frac{1}{2}at^2 + bt + c \quad \text{iar}$$

$$v = at + b.$$

3. Mișcarea circulară (fig. 260). Notînd cu $\theta(t) = \theta$, unghiul pe care-l face raza punctului mobil cu direcția pozitivă a axei Ox,

arcul $AM = R\theta(t)$ măsoară spaţiul parcurs de mobil din poziţia iniţială. Expresia $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ se numeşte *viteza unghiulară* a mobilului. Dacă $\omega = \text{const}$ mişcarea se numeşte *circulară uniformă*. Mişcarea circulară se studiază cu ajutorul reprezentării

(375) $$\boxed{r = R\cos\theta i + R\sin\theta j.}$$

§ 8.3. Elemente de dinamică

1. Conform principiilor mecanicii clasice (newtoniene), un punct material în mişcare, sub acţiunea unui sistem de forţe (S), va descrie o mişcare care va satisface ecuaţiei fundamentale

(376) $$\boxed{m\mathbf{a} = \mathbf{F} \text{ sau } m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F},}$$

unde m este *masa* punctului, *a acceleraţia* iar $\mathbf{F}$ *rezultanta* sistemului (S).
Dacă mişcarea este plană, ecuaţia (376) se mai poate scrie sub *forma scalară*

(377) $$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = X(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),\ m\frac{d^2y}{dt^2} = Y(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),}$$

unde X şi Y sînt componentele lui $\mathbf{F}$.

2. Se numeşte *impuls* vectorul $\mathbf{H} = m\mathbf{v}$, *moment cinetic* vectorul $\mathbf{K} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, adică momentul vectorului impuls aplicat în M, faţă de origine, *energie cinetică* scalarul $E = \frac{1}{2} mv^2$ şi *lucru mecanic* scalarul

$$(378) \qquad \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t} \left(X \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + Y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t.$$

Teoreme. a) Derivata impulsului este egală cu rezultanta forţelor ce acţionează asupra lui M.

b) Derivata momentului cinetic faţă de origine este egală cu momentul rezultantei faţă de acelaşi punct.

c) Variaţia energiei cinetice între momentele t şi t_0 este egală cu lucrul mecanic al rezultantei între aceste momente.

3. În mişcarea rectilinie ecuaţiile (377) se reduc la prima. Avem următoarele cazuri importante:

a) Rezultanta X depinde numai de poziţia punctului, adică $X = f[x(t)] = F(x)$. Ecuaţia diferenţială (377) se reduce la

$$(379) \qquad v^2 = \frac{2}{m} \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x + v_0^2 = g^2(x),$$

$$(379') \qquad t - t_0 = \varepsilon \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{g(x)} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

t_0 reprezintă *momentul inițial* iar v_0 *viteza inițială*; ecuația (379′) inversată, ne dă legea mișcării.

b) $X = f(v)$, rezultă

$$(380) \qquad t - t_0 = m \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}$$

de unde obținem v funcție de t; mai departe

$$(380') \quad x - x_0 = m \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{f(v)} \quad (x_0 = \text{spațiul inițial}),$$

care dă pe x funcție de v; dacă vrem să avem pe x funcție de t, va trebui să eliminăm pe v între (380) și (380′).

c) $X = f(t)$, atunci

$$(381) \quad x = \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt \right) dt + v_0(t - t_0) + x_0$$

cu aceleași notații ca mai sus.

9. CALCULUL PROBABILITAŢILOR

§ 9.1. Evenimente, probabilităţi

1. Rezultatele obţinute într-o experienţă, se numesc *evenimente*. Mulţimea tuturor evenimentelor legate de o experienţă formează un *cîmp de evenimente* K. Printre evenimentele unui cîmp, avem: *evenimentul sigur* (E) care se produce cu certitudine în efectuarea experienţei, *evenimentul imposibil* ($\varnothing$) care nu se produce în acelaşi proces; în general evenimentele se numesc *aleatoare* deoarece au loc întîmplător.

Într-un cîmp de evenimente introducem o *algebră booleană* (§ 2.1.2) construită cu ajutorul operaţiilor *sau* ($+$), *şi* ($\cdot$), *nu* ($\sim$); vom presupune că orice eveniment nou construit prin aceste operaţii, aparţine cîmpului.

2. Se zice că două evenimente, aparţinînd lui K, sînt *incompatibile* cînd $A \cdot B = AB = \varnothing$, adică nu pot avea loc simultan; din contră, vom spune că sînt *compatibile* cînd pot avea loc simultan. Mai

multe evenimente pot fi compatibile două cîte două dar incompatibile în ansamblul lor.

Din K scoatem o submulțime K_1 pe care o vom numi *de evenimente elementare* E_i dacă:

a) K_1 nu conține pe $\varnothing$.

b) Două evenimente ale lui K_1 sînt incompatibile, $E_h E_k = \varnothing$.

c) K_1 conține toate elementele lui K, care se bucură de aceste proprietăți.

Se poate demonstra că cu ajutorul lui K_1, putem exprima toate evenimentele lui K putînd fi scrise sub una din formele

$$(382) \quad \varnothing, E_i, E_i + E_j, E_i + E_j + E_h, \ldots, E_1 + E_2 + \ldots + E_n = E.$$

Această proprietate are loc pentru un cîmp finit de evenimente.

3. Frecvență. Probabilitate. Să considerăm o experiență și un eveniment A corespunzător acestei experiențe. Repetînd experiența de n ori, evenimentul A se poate reproduce de m ori. Numărul $f_n = m/n$ $(0 < f < 1)$ se numește *frecvență* care evident variază cu numărul de experiențe dar tinde către un număr care se numește *probabilitatea* $P(A)$ a evenimentului A. Această proprietate se numește *legea numerelor mari*. În calcule vom lua $P(A) = m/n$. Mulțimea tuturor evenimentelor legate de o experiență împreună cu pro-

babilităţile respective, formează un *cîmp de probabilitate*.

Probabilitatea unui eveniment are următoarele proprietăţi (care pot fi luate ca axiome):

$$\text{(383)} \qquad \boxed{\begin{array}{l} P(A) \geqslant 0;\ P(E) = 1; \\ \text{dacă } AB = \varnothing, \text{ atunci} \\ P(A + B) = P(A) + P(B). \end{array}}$$

Avem de asemenea proprietăţile:

$$\text{(384)} \qquad \boxed{P(\varnothing) = 0,\ P(\tilde{A}) = 1 - P(A).}$$

Relaţia (383) exprimă că probabilitatea producerii cel puţin a unuia din evenimentele incompatibile A, B este egală cu suma probabilităţilor fiecărui eveniment în parte.

Dacă A, B sînt oricare,

$$\text{(385)} \qquad \boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

şi mai general *(formula lui Poincaré)*

$$\text{(385')} \qquad \boxed{\begin{array}{l} P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \Sigma P(A_i) - \\ - \Sigma P(A_i A_j) + \Sigma P(A_i A_j A_h) - \\ - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \ldots A_n). \end{array}}$$

4. Probabilități condiționate. Dacă într-o experiență se produc succesiv două evenimente A, B, în general, probabilitatea evenimentului al doilea va fi condiționată de producerea primului eveniment. Notînd cu $P(B|A)$ această *probabilitate condiționată*, avem

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{386}$$

În general, probabilitatea ca să se realizeze n evenimente $A_1, \ldots, A_n$ este dată de formula

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}). \tag{387}$$

5. Evenimente independente. Se spune că două evenimente A, B sînt *independente*, dacă

$$P(AB) = P(A)\,P(B). \tag{388}$$

Pentru ca mai multe evenimente să fie independente între ele, trebuie să fie independente două cîte două, trei cîte trei,

$$P(ABC) = P(A)\,P(B)\,P(C) \text{ etc.} \tag{388}$$

6. Dacă avem un sistem de evenimente elementare $E_1, \ldots, E_n$ și dacă A este un eveniment oarecare al cîmpului, atunci

$$\boxed{P(A) = P(E_1)\,P(A\,|E_1) + \ldots + P(E_n)P(A\,|E_n),} \tag{389}$$

care se numește teorema *probabilității totale*. Avem de asemenea *formula lui Bayes*

$$\boxed{P(E_i\,|A) = \frac{P(E_i)\,P(A\,|E_i)}{\sum_{h=1}^{n} P(E_h)\,P(A|E_h)}.} \tag{390}$$

§ 9.2. Scheme clasice de probabilitate

1. Schema lui Poisson. Se dau n urne $U_1, \ldots, U_n$ care conțin bile albe și bile negre în proporții date, ceea ce ne va permite să calculăm probabilitățile p_i și $q_i = 1 - p_i$, pentru a scoate o bilă albă sau una neagră din fiecare urnă. Extrăgînd din fiecare urnă cîte o bilă, probabilitatea de a avea k bile albe (și deci $n - k$ bile negre) va fi egală cu coeficientul A_k al lui x^k din polinomul

$$\begin{aligned}\Omega(x) &= (p_1x + q_1)(p_2x + q_2)\ldots(p_nx + q_n) = \\ &= p_1p_2\ldots p_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \\ &+ \ldots + A_kx^k + \ldots + A_1x + q_1q_2\ldots q_n.\end{aligned} \tag{391}$$

2. Schema lui Bernoulli corespunde cazului cînd în schema precedentă cele n urne sînt identice. În acest caz problema se poate enunța și astfel: probabilitatea de a scoate k bile albe din n extrageri dintr-o urnă, punînd de fiecare dată bila înapoi, este

$$(392)\quad \boxed{P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k},}$$

unde p este probabilitatea obținerii unei bile albe într-o singură extragere, iar $q = 1 - p$ probabilitatea obținerii unei bile negre.

3. Schema lui Bernoulli cu mai multe stări. Dacă o urnă conține bile de m culori $c_1, c_2, \ldots, c_m$ și p_i este probabilitatea ca la o extragere să se obțină o bilă de culoare c_i, atunci probabilitatea ca în n extrageri (cu bilă întoarsă) să obținem n_1 bile de culoarea c_1 n_2 bile de culoare c_2, ..., n_m bile de culoare c_m, este

$$(393)\quad \boxed{P_{n;n,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m} \quad (n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n).}$$

4. Schema bilei neîntoarse. O urnă conține a_i bile de culoarea $c_i (i = 1, 2, \ldots, m)$; probabilitatea ca în n extrageri să se scoată n_1 bile de culoare

c_1, n_2 bile de culoare c_2, ..., n_m bile de culoarea c_m este

$$p = \frac{C_{a_1}^{n_1} C_{a_2}^{n_2} \dots C_{a_m}^{n_m}}{C_{a_1+a_2+\dots+a_m}^{n_1+n_2+\dots+n_m}}. \tag{394}$$

§ 9.3. Variabile aleatoare. Valori tipice

1. O variabilă aleatoare este o funcție definită pe mulțimea evenimentelor elementare ale unui cîmp de probabilitate; o vom reprezenta prin tabelul (schema)

$$X\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{pmatrix} \equiv X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}, \tag{395}$$

numită *repartiția* sau *distribuția* variabilei aleatoare *(discrete)*; prin ipoteză, valorile variabilei x_i sînt diferite între ele, iar $p_i = P(X = x_i)$ satisfac relației

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \tag{395'}$$

Se numește *funcție de repartiție* a variabilei aleatoare, expresia

$$F(x) = P(X < x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} \quad (x_{r-1} \leqslant x < x_r). \tag{396}$$

Repartiția § 9.2	Variabila aleatoare
Poisson	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix}$
Bernoulli	$\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & k & \dots 0 \\ p^n & C_n^1 p^{n-1} q & \dots & C_n^k p^{n-k} q^k & \dots q \end{pmatrix}$
Bila neîntoarsă	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ \frac{C_a^0 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \frac{C_a^1 C_b^{n-1}}{C_{a+b}^n} & \dots & \frac{C_a^n C_b^0}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix}$

2. În calcule se întîlnesc *operații* cu variabile aleatoare. Astfel: a) Fiind date variabilele

$$X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}\Big(i=1,2,\dots,n\Big), \quad Y\begin{pmatrix} y_j \\ p_j' \end{pmatrix}\Big(j=1,2,\dots,m,\Big),$$

prin *suma* lor înțelegem variabila aleatoare

$$(397)\quad (X+Y)\begin{pmatrix} x_i+y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1\right).$$

Dacă variabilele aleatoare sînt independente (§ 9.1.5), atunci $p_{ij} = p_i p_j$

b) În particular ($a = \text{const}$).

$$(X + a)\begin{pmatrix} x_i + a \\ p_i \end{pmatrix}, \quad (aX)\begin{pmatrix} ax_i \\ p \end{pmatrix}.$$

c) Produsul are repartiția

$$(398) \quad (XY)\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \quad \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1\right).$$

3. Valoarea medie a unei variabile aleatoare, este definită prin formula

$$(399) \qquad m = M(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Proprietăți

$$M(X + a) = M(X) + a, \; M(aX) = aM(x),$$
$$M(X + Y) = M(X) + M(Y), \; \eta < M(X) < \xi$$

unde η și ξ sînt respectiv cea mai mare și cea mai mică valoare x_i;

$$M(XY) = M(X)M(Y),$$

dacă variabilele X și Y sînt independente.

4. Dispersia unei variabile aleatoare este definită prin formula

$$(400) \qquad \sigma^2 = D^2(X) = M[(X - m)^2] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m)^2.$$

Proprietăţi

$$D^2(X + a) = D^2(X), \quad D^2(aX) = a^2 D^2(X),$$
$$D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y),$$

ultima avînd loc dacă variabilele X şi Y sînt independente.

T. 29.

Repartiţia	Media	Dispersia
Poisson	$\sum_{i=0}^{n} iA_i = \sum_{i=1}^{n} p_i$	$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$
Bernoulli	np	$\sigma = \sqrt{npq}$
Bila neîntoarsă	$na / (a + b)$	$\sigma^2 = npq \dfrac{a + b - n}{a + b - 1}$

§ 9.4. Elemente de statistică matematică

1. Statistica matematică se ocupă cu studiul datelor referitoare la un anumit fenomen; orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice, se numește *populație statistică*. Trăsătura comună tuturor obiectelor unei populații se numește *caracteristică* care poate fi *cantitativă* (cînd se poate măsura) sau *calitativă*. O analiză statistică a unui fenomen, conduce la o *serie statistică*.

2. Vom numi *efectivul* unei populații numărul elementelor acesteia, *frecvență absolută* a unei valori a caracteristicii, numărul de unități ale populației corespunzătoare acestei valori, *frecvența relativă* raportul dintre frecvența absolută și efectivul populației. În statistică noțiunile de *variabilă aleatoare* și *probabilitate* se înlocuiesc cu *caracteristică* sau *variabilă statistică* și *frecvență relativă*. Notînd cu x o valoare a caracteristicii, suma frecvențelor absolute ale tuturor valorilor variabilei mai mici ca x se numește *frecvență absolută cumulată crescătoare* și analog, pentru *frecvență relativă cumulată crescătoare*; ultima joacă rolul funcției de repartiție din cazul variabilelor aleatoare (§ 9.3.1)

3. Reprezentarea grafică a seriilor statistice (diagrame).

a) În cazul în care caracteristica este calitativă, seria este reprezentată prin dreptunghiuri avînd aceeași bază, iar înălțimea proporțională cu coefi-

cientul calitativ. În fig. 261 este reprezentată o producție prin procentele anumitor părți ale ei.

b) În cazul în care caracteristica este calitativă se face o reprezentare grafică cu ajutorul unui sistem de axe perpendiculare:

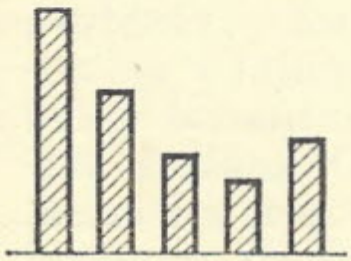


Fig. 261

α) Fiind dată o serie în care valorile corespund la amplitudini egale, se obține o reprezentare printr-o *histogramă*, luînd pe axa orizontală o succesiune de segmente egale și construind pe fiecare din ele ca bază, dreptunghiuri a căror înălțime este proporțională cu frecvența corespunzătoare (fig. 262).

β) Dacă în mijlocul fiecărui segment orizontal se ridică o ordonată egală cu frecvența și se unesc

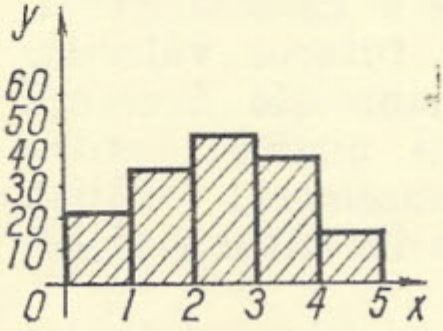


Fig. 262

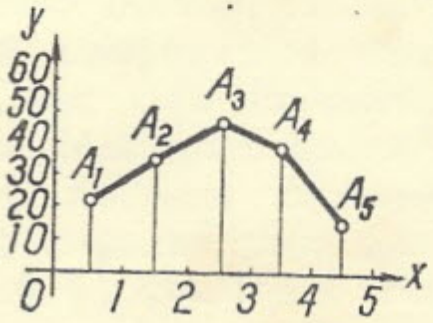


Fig. 263

capetele acestor ordonate se obține un *poligon al frecvențelor* (fig. 263); construcția s-a făcut pe baza histogramei din fig. 262.

4. Elementele tipice ale unei serii statistice.
a) *Modul (dominanta)* este valoarea caracteristică corespunzătoare celei mai mari frecvențe.
b) *Mediana* unei serii este numărul x_0, astfel ca să existe tot atîtea unități statistice corespunzătoare valorilor mai mici ca x_0 cu cele corespunzătoare valorilor mai mari ca x_0.
c) *Media aritmetică* a n valori $x_1, \ldots, x_n$ este

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

d) *Valoarea medie* este

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

unde f_i sînt frecvențele relative și corespunde mediei din calculul probabilităților (§ 9.3.4).
e) *Dispersia* este (§ 9.3.5)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^n.$$

Abaterea medie pătratică este expresia σ și indică gradul de împrăștiere a valorilor în jurul mediei.

5. Problemele de bază ale statisticii matematice.
a) Legitățile proprii fenomenelor întîmplătoare de masă sînt cu atît mai pregnante cu cît volumul materialului obținut prin observări este mai mare.

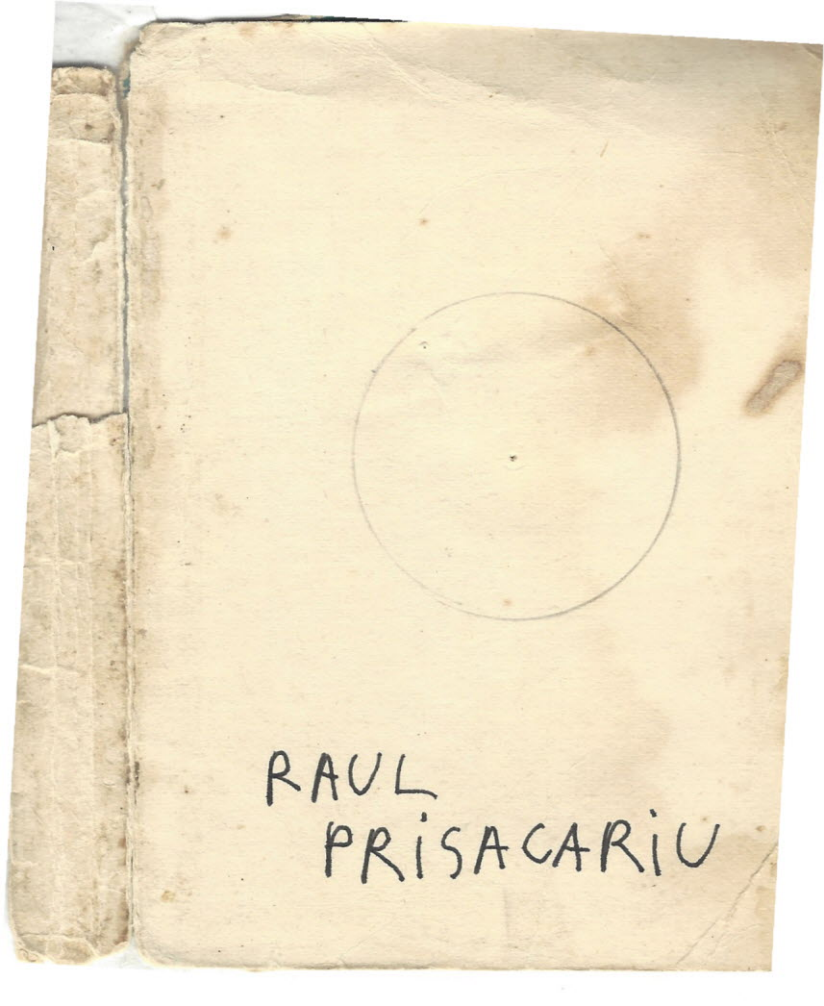
În practică de obicei se dispune de o cantitate redusă de date ceea ce face ca rezultatele obținute pe baza lor să fie influențate de elemente întîmplătoare. Prima problemă este de a ne da seama care dintre trăsături sînt permanente și deci caracteristice fenomenului pe care îl studiem. Deci, în această problemă trebuie să știm care sînt metodele care păstrează aceste caracteristici și le elimină pe celelalte. Ansamblul acestor metode se referă la *tehnica ajustării* datelor statistice.

b) Cu datele pe care le avem la dispoziție se vor face unele ipoteze asupra caracterului legității statistice care apare în fenomenul cercetat și pe care trebuie apoi să le *verifice* cu ajutorul materialului de care dispunem.

c) A treia problemă este *estimarea* parametrilor necunoscuți care intră în legile admise. Statistica matematică oferă matode specifice pentru estimarea mediei, dispersiei și eventual a altor valori tipice. Se pune de asemenea problema de a se determina *precizia* cu care s-au efectuat calculele.

Bun de tipar 22 XI 1973
Tirajul 90.925 ex. broşate. C. Z. 51 (083)

Tiparul executat sub comanda 5.286 la Întreprinderea Poligrafică Bacău. Str. Eliberării nr. 63.


RAUL
PRISACARIU

Lei 8